Attention : cette version est postérieure à celle publiée dans la revue Petit X n°55.

L'IMPLICATION. QUELQUES ASPECTS DANS LES MANUELS ET POINTS DE VUE D'ÉLÈVES-PROFESSEURS.

Virginie DELOUSTAL-JORRAND
Doctorante
Équipe CNAM, Laboratoire Leibniz

Résumé. L'implication apparaît comme un objet mathématique transversal. L'objet de cet article est, à travers l'étude de quelques manuels et l'analyse de conceptions de futurs enseignants de repérer notamment comment ce concept prend sens et quelles difficultés lui sont attachées.

Introduction

L'implication apparaît comme un *objet mathématique transversal*. Toute définition (précise) est en fait la donnée d'une équivalence, or l'équivalence n'est rien d'autre que l'intersection de deux implications. Définir l'implication apparaît ainsi d'emblée comme un paradoxe.

L'implication est donc un objet proto-mathématique et même proto-logique. Or l'implication est au centre de toute activité (une prise de décision motivée est toujours fondée sur une implication), plus spécialement de toute activité scientifique et en particulier mathématique. Il est essentiel dans la formulation de preuves et de démonstrations.

Notre étude est motivée par les travaux de Durand-Guerrier (1996) d'une part, et de Rolland (1999) d'autre part. Durand-Guerrier montre en particulier l'importance des énoncés contingents pour la compréhension de l'implication.

> [...] la notion d'énoncé contingent n'appartient pas à strictement parler à la logique formelle. Cependant [...] la logique des prédicats permet d'introduire une notion de nécessité *de dicto* liée à la quantification universelle, et par la même la notion d'énoncé contingent [...]. Ceci nous a conduit à mettre en question la pratique, largement répandue chez les enseignants de mathématiques, de la quantification universelle implicite des énoncés

«petit x» n° 55, pp. 35 à 71, 2000 - 2001

> conditionnels; et ce d'autant plus que [...] de nombreux élèves ne partagent pas cet implicite. (op. cit., p. 402)

Durand-Guerrier s'est ainsi attachée à "réconcilier" la logique formelle et la logique naturelle. Rolland s'est intéressé, quant à lui, à la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante.

> Au sujet de la distinction CN/CS, nos expérimentations montrent que les difficultés se situent aussi bien au niveau des expressions langagières signifiant l'implication qu'à celui du sens logique, de l'utilisation dans un raisonnement de conditions nécessaires et conditions suffisantes. (Rolland, 1999, p. 302)

L'objet de cet article est, à travers l'étude de quelques manuels et l'analyse de conceptions d'étudiants, de repérer notamment comment ce concept prend sens, dans quels cadres se forgent ses significations, quelles difficultés lui sont attachées. Pour étudier ce concept, nous nous posons des questions de type *didactique* et *épistémologique.*

Quel est l'objet mathématique implication ? Quels liens a-t-il avec l'objet naturel ?
Quel enseignement de l'objet implication ? Quelle est sa place dans les manuels ?
Quel sont les conceptions de futurs enseignants sur certains aspects de l'objet implication ?

Nous avons donc, dans une première partie, répertorié et étudié plusieurs points de vue sur l'implication et les liens entre ceux-ci : point de vue du *raisonnement déductif*, point de vue de la *logique formelle* et point de vue *ensembliste*.

Nous avons ensuite étudié l'enseignement de l'implication à travers les manuels, reprenant à notre compte la position adoptée par Mensouri :

> Les manuels constituent aussi une réalisation effective et « objectivée » des enseignements donnés en classe. Réalisation soumise au regard et au jugement public, et qui se veut représentative de la réalité de la classe (Mensouri, 1994)

Cette position est d'autant plus justifiée que, dans le secondaire, il ne paraît pas y avoir de temps spécifique pour l'enseignement de l'implication.

Enfin, nous avons proposé à quatre étudiants-futurs enseignants, un questionnaire individuel suivi d'un débat les regroupant pour mettre en conflit certaines propriétés en acte liées à l'implication.

Par souci de concision, nous avons choisi de ne nous intéresser, dans cet article, qu'à certains items du questionnaire et de ne pas parler des résultats du débat.

1. L'implication : objet naturel et objet mathématique

La notion d'implication existe dans la *logique naturelle*. C'est celle-ci qui nous permet de dire : « le ciel est bleu donc il ne pleuvra pas. », « Tu auras du dessert si tu manges ta soupe ».... Elle nous est nécessaire, dans notre vie de tous les jours, pour communiquer à l'aide du langage.

On peut alors voir le *concept mathématique d'implication* comme une *modélisation* de l'implication dans la logique naturelle. Comme tout modèle, le concept mathématique est conforme à la logique naturelle sous certains aspects et ne l'est pas sous d'autres.

On peut distinguer trois points de vue sur l'implication mathématique :
- le point de vue du *raisonnement déductif.*
- le point de vue *ensembliste*.
- le point de vue de la *logique formelle.*

Le schéma ci-dessous visualise ces différents aspects :

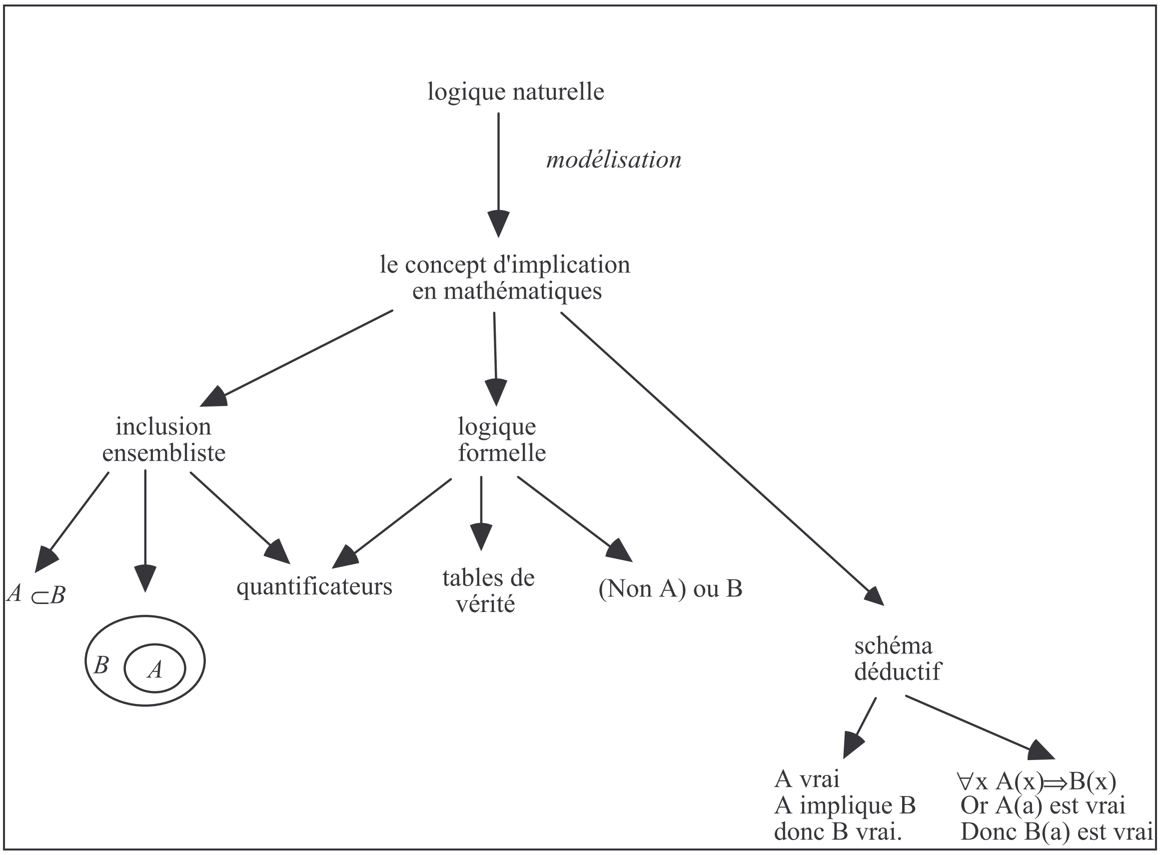

Schéma. Les trois points de vue sur l'implication mathématique

Nous plaçons le point de vue du raisonnement déductif à un niveau différent de celui des deux autres. Pour mettre en évidence sa particularité : il ne s'agit pas de définir l'objet « implication » mais de montrer une utilisation courante de l'implication en mathématique. De plus, dans l'enseignement secondaire où ce point de vue est le plus, sinon le seul, présent, il fait souvent office de définition pour l'implication. Nous allons préciser cela maintenant.

1.1. Le point de vue du raisonnement déductif

Nous entendons par « point de vue déductif sur l'implication », l'écriture et l'utilisation de l'implication dans un raisonnement sous la forme :

A est vraie
A => B est vraie
Donc B est vraie

Ceci correspond à un *pas de déduction* : sa structure ternaire comprend une prémisse (A est vraie), un énoncé tiers (A=>B) et une conclusion (B est vraie) à laquelle on aboutit par la règle du détachement. (Duval, 1993, p. 44)

Dans cette utilisation de l'implication, le mathématicien (ou l'élève) s'intéresse essentiellement au cas où *A est vrai* pour plusieurs raisons.

D'abord, si on utilise l'implication comme règle d'inférence, c'est que, par ailleurs, la prémisse est vraie. L'implication est ainsi réduite à la forme « Si A est vraie alors B est vraie ».

De plus, dans le cas où l'implication est universellement quantifiée, pour montrer que celle-ci est vraie, il suffit de supposer la prémisse vraie et d'établir que la conclusion est vraie.

Enfin, lorsque une implication est vraie, il est naturel de se demander si c'est une équivalence. On peut alors envisager deux méthodes : soit on montre que la conclusion est fausse lorsque la prémisse est fausse, soit on montre que la réciproque de cette implication est vraie. Cependant, ici encore, la pratique mathématique privilégie la deuxième solution et évite le cas de la prémisse fausse.

Nous faisons l'hypothèse que cette utilisation usuelle et quasi exclusive de l'implication dans l'activité mathématique induit chez les élèves la propriété-en-acte[1] suivante :

« A=>B n'a pas d'intérêt lorsque A est fausse ».

De là, peut aussi découler la propriété-en-acte :

« A=>B est fausse lorsque A est fausse ».

Remarquons d'autre part que, dans l'activité mathématique courante, les implications sont utilisées pour démontrer un résultat. On enchaîne donc des propriétés vraies, grâce à des implications, pour aller des hypothèses vers la conclusion. Ces propriétés ont donc des relations entre elles visibles facilement, au moins lorsqu'elles ne sont pas trop « éloignées » dans le cours du raisonnement, c'est-à-dire lorsque le nombre de pas de démonstration les séparant est restreint.

Nous faisons l'hypothèse que cette utilisation de l'implication peut induire chez les élèves la propriété-en-acte suivante, que nous appellerons « propriété-en-acte de causalité » :

« A=>B n'a de raison d'être que lorsque A et B ont un lien de causalité (évident) entre elles ».

En fait, il ne faut pas considérer les liens de cause à effet au sens strict, cette propriété-en-acte se traduit alors par le fait que la prémisse et la conclusion doivent être reliées entre elles. C'est-à-dire qu'elles ne doivent pas être étrangères l'une à l'autre, qu'il doit exister une « explication », un cheminement sémantique pour passer de l'une à l'autre.

Cette propriété-en-acte de causalité peut amener à répondre que :

[1] Une règle d'action (ou propriété-en-acte) est un règle (ou propriété) attribuée, par des élèves, à un concept mathématique.

• on ne peut pas parler d'implication entre deux propositions dès lors qu'elles n'ont pas de lien de cause à effet visible (ou qu'il n'y a pas de cheminement menant de l'une à l'autre).
• l'implication « A=>B » est fausse lorsque A n'est pas la « cause » de B (ou qu'il n'y a pas de cheminement sémantique menant de A à B).

Notons, que cette propriété-en-acte peut être renforcée par les expressions langagières associées à l'implication. En effet, les expressions « A implique B », « A entraîne B », « A donne B »... laissent penser qu'il y a bien un lien de cause à effet entre l'hypothèse et la conclusion d'une implication.

Notons encore qu'en logique naturelle « A implique B » est associée à « A est la cause de B ».

De plus, cette conception de causalité peut induire un *ordre temporel* entre la prémisse et la conclusion. En effet, dans le monde physique la cause précède la conséquence. Cela induit que, pour que A implique B, A doit être remplie avant B.

Dans cette conception de l'implication, on ne peut admettre facilement l'équivalence mathématique entre « A=>B » (où A est avant B) et « (Non B)=>(Non A) » (où Non B doit précéder Non A).

D'autre part, si B est perçue comme la conséquence de A, comment admettre que B est une condition nécessaire pour A ?

1.2. Le point de vue ensembliste

Soit A l'ensemble des objets mathématiques vérifiant la propriété A[2].
Soit B l'ensemble des objets mathématiques vérifiant la propriété B.
Alors :
L'implication de B par A (c'est-à-dire A=>B) est équivalente[3] à l'inclusion de A dans B (c'est-à-dire $A \subset B$)[4].

Le point de vue ensembliste est peu pertinent pour traiter les implications entre propositions[5]. En effet, pour parler d'ensembles, il faut avoir des énoncés contingents[6] et des objets « de même nature », ou du moins être capable de définir les objets qui forment ces ensembles. On ne peut, par exemple, pas représenter, ou alors avec difficulté, les implications : « 3 pair => il fait beau maintenant à Grenoble » ou « 3 pair => 4 impair ». On peut, en revanche, représenter l'implication entre énoncés contingents « Tout carré est un rectangle » qui est vraie car l'ensemble des carrés est

---

[2] Parfois la même lettre est utilisée pour désigner l'ensemble et la propriété.
[3] Nous employons, ici, le terme « équivalente » avec sa signification mathématique.
[4] Nous pouvons souligner, ici, une difficulté liée à l'écriture de l'implication en logique formelle. En effet, on écrit parfois « $A \supset B$ » pour « A=>B » alors que cela est lié à l'inclusion ensembliste :
« $A \subset B$ »
[5] « En logique classique, une *proposition* est une entité linguistique qui porte le vrai ou le faux. » (Durand-Guerrier, 1999, p. 65)
[6] « Un énoncé est *contingent* pour un sujet donné à un instant donné t si le sujet n'a pas, à l'instant t, les moyens de savoir si cet énoncé est vrai ou faux. » (Durand-Guerrier, 1999, p. 70)

inclus dans l'ensemble des rectangles**.** Il faut cependant être nuancé, tous les énoncés quantifiés ne sont pas aisés à traiter grâce aux ensembles, comme par exemple : « $\forall k \in N$, k pair => k+1 pair ». En effet, il est difficile de trouver les ensembles adéquats pour associer cette dernière implication à une inclusion d'ensembles.

1.3. Le point de vue de la logique formelle

Le point de vue de la logique formelle décrit l'implication à l'aide des *tables de vérité* ou des *connecteurs logiques*. On trouve différentes écritures des connecteurs logiques : Non A, ¬A, ou, £, et, 3...

« A=B » est équivalente à la formulation « (Non A) ou B », c'est-à-dire que l'implication est fausse si et seulement si l'on a A et (Non B) en même temps.

Ce que l'on retrouve dans la table de vérité associée :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ce tableau permet de traiter les implications entre propositions. Reprenons les exemples ci-dessus, « 3 pair => il fait beau maintenant à Grenoble » et « 3 pair => 4 impair » sont vraies car la prémisse[7] de ces implications est fausse : « 3 pair » est une proposition fausse.

Ce point de vue permet aussi de traiter les implications entre énoncés contingents. L'implication « tout carré est un rectangle » est vraie car, quel que soit le carré A, « A est un carré » est vraie et « A est un rectangle » est vraie.

Remarque sur le cas de la prémisse fausse

Dans la table précédente, le choix sur la véracité de l'implication, dans les deux cas où la prémisse A est fausse, n'est pas arbitraire. En effet, cette propriété découle de certaines conventions qui régissent cette logique et de l'aspiration à rendre compte de certains aspects de la logique naturelle.

Dans le cadre de la logique des propositions, ces conventions sont :

• ***Bivalence des propositions :*** une proposition a exactement deux valeurs de vérités possibles, Vrai ou Faux.

• *Principe du tiers exclu* : une proposition est soit vraie soit fausse, jamais les deux en même temps.

• *Vérifonctionnalité de l'implication* : « A=>B » ne dépend que des valeurs de vérité respectives de A et de B et non de leur contenu sémantique.

---

[7] Nous appelons, ici, *« prémisse »* le terme placé avant le symbole d'implication. Nous pourrions également l'appeler « antécédent » et nous ne sous-entendons pas que la prémisse est vraie. De même nous appellerons *« conclusion »* le terme placé après le symbole d'implication.

On peut remarquer, dès à présent, que, si le principe du tiers exclu paraît assez proche de la logique naturelle, la vérifonctionnalité de l'implication ne paraît pas conforme à celle-ci. En effet, dans ce modèle mathématique, A=>B est toujours vraie dès lors que B est vraie, même si A et B n'ont apparemment aucun lien. Par exemple : « théorème de Pythagore => théorème des valeurs intermédiaires » est une implication vraie.

Quant à la bivalence, elle est adaptée aux propositions, alors que la logique naturelle paraît plus proche des énoncés contingents.

Dans le cadre de la logique naturelle on peut argumenter que l'implication « A implique B » est équivalente à sa contraposée[8] « (Non B) implique (Non A) »[9] :

Supposons que « A implique B » est vraie, supposons, de plus, que Non B est vraie (c'est-à-dire que B est fausse). Si A était vraie alors B serait vraie, puisque l'implication « A implique B » est vraie, or B est fausse, c'est donc que A est fausse.

Le modèle mathématique paraît donc conforme à la logique naturelle du point de vue de la contraposée.

Examinons maintenant le cas où la prémisse est fausse. Pour cela, remplissons partiellement les tables de vérités de « A=>B » et de sa contraposée[10] :

A	B	A=>B	Non B	Non A	NonB=>NonA
V	V	V	F	F	-
V	F	F	V	F	F
F	V	-	F	V	-
F	F	-	V	V	V

Comme « A=>B » et sa contraposée « Non B=>Non A » sont équivalentes, il faut que les troisièmes et sixièmes colonnes soient identiques et donc égales à la troisième colonne ci-dessous :

A	B	A=>B
V	V	V
V	F	F
F	V	-
F	F	V

Ceci règle le cas où la prémisse et la conclusion sont fausses.

Au point de l'analyse où nous sommes, nous pouvons donc donner deux caractérisations distinctes de l'implication, correspondant à deux choix différents pour le cas A Faux et B Vrai :

---

8 En fait, le terme « contraposée » est déjà un terme issu du modèle mathématique. Pour la logique naturelle, on parle plutôt de « Modus Tollens ».

9 Pour cette « démonstration », nous allons utiliser la *bivalence* des propositions, le principe du *tiers exclu* et le fait que « A=B » est vraie dès que : « si A est vraie alors B est vraie ». Cela nous paraît assez conforme à la logique naturelle pour cette question.

10 Pour cela, nous utiliserons les conventions du modèle mathématique citées ci-dessus.

première caractérisation :

A	B	A=>B
V	V	V
V	F	F
F	V	**VRAI**
F	F	V

deuxième caractérisation :

A	B	A=>B
V	V	V
V	F	F
F	V	**FAUX**
F	F	V

Nous remarquons que le deuxième tableau est symétrique par rapport à A et à B. C'est-à-dire qu'il n'y a pas de différence de statut entre A et B. Or ceci est contraire à la logique naturelle pour laquelle les rôles respectifs de la prémisse et de la conclusion ne sont pas les mêmes. Nous sommes, en fait, en présence de la table de vérité de ***l'équivalence***.

Pour conserver la dissymétrie des propositions A et B, la définition de l'implication dans le modèle mathématique doit donc être celle associée à la première table de vérité.

En conclusion, bien qu'il ne soit pas évident, pour la logique naturelle, de donner la valeur de vérité vraie à l'implication dont la prémisse est fausse, cette règle du modèle mathématique n'est pas arbitraire. Il n'existe pas une unique façon de modéliser la logique naturelle, mais ce choix-là permet de rendre compte de la contraposée, compte tenu des conventions précitées.

Cependant, nous pouvons faire quelques remarques.

Les conventions de la logique formelle sont des nécessités de ce système qui ne paraissent pas toutes conformes à la logique naturelle, en particulier la vérifonctionnalité.

D'autre part, la logique naturelle s'intéresse plus aux énoncés contingents, ce qui est source d'erreurs lorsque l'on considère des propositions. En effet, ce modèle mathématique n'est pas conçu pour traiter n'importe quelles propositions, en particulier celles qui n'ont pas de lien entre elles. Par exemple, ce modèle ne permet pas de traiter l'implication « si je vais me promener alors Madrid est la capitale de l'Espagne ».

En résumé, ce modèle mathématique est donc conforme à la logique naturelle sous certains aspects (tiers exclu, A=>B est vraie dès que « si A vrai alors B vrai », A=>B est fausse dès que A est vraie et B est fausse, équivalence de l'implication avec sa contraposée…) et ne l'est pas sous d'autres (A=>B est vraie dès que A est fausse, vérifonctionnalité et donc possibilité de donner une valeur de vérité à une implication qui peut paraître « absurde »…).

1.4. A propos des quantificateurs

Les quantificateurs peuvent apparaître, à la fois liés au point de vue ensembliste (lorsqu'on écrit $A \subset B$, cela veut dire que tous les objets de A sont dans B) et à la logique formelle (dans la théorie des phrases ouvertes[11]). Dans le schéma déductif, nous faisons la différence entre les deux énoncés :

A vrai	et	$\forall x$ A(x)=B(x)
A=>B		Or A(a) est vrai
donc B vrai.		Donc B(a) est vrai.

• Le premier énoncé rend compte d'un point de vue propositionnel alors que le second étudie l'implication sous une forme universellement quantifiée.
• Dans le premier énoncé, la prémisse est reconnue vraie avant que l'on ne s'intéresse à l'implication. Dans le second, l'implication démontrée vraie pour tous les objets est instanciée dans le cas de a. On se pose, pour cela, la question de la vérité de la prémisse A(a).

Le premier énoncé paraît être le plus utilisé dans l'enseignement du second degré.

1.5. Rapports entre les différents points de vue

Ces différents points de vue sur l'implication sont évidemment reliés entre eux.

Nous avons montré, dans la partie précédente, comment le point de vue de la logique formelle se déduit de la logique naturelle dès lors que l'on veut rendre compte de la contraposée et respecter les conventions nécessaires au système.

De ce point de vue de la logique formelle, on peut alors passer au point de vue ensembliste à l'aide des tables de vérité :

Quelle que soit la configuration des ensembles A et B entre eux (l'un inclus dans l'autre, disjoints, ou avec une intersection non vide et non égale à l'un des deux ensembles), « A=>B » est vraie pour tous les éléments de l'ensemble (le complémentaire de A dans C), où A et B sont inclus dans un même ensemble C et où A (resp. B) est l'ensemble des objets vérifiant la propriété A (resp. B).

Enfin, le raisonnement déductif utilise essentiellement les propriétés suivantes de la logique formelle :
• « A=>B » est fausse lorsque A est vraie et B est fausse.
• « A=>B » est vraie lorsque A est vraie et B est vraie, avec cependant un implicite de cheminement explicatif reliant A et B.
• la contraposée de l'implication est équivalente à l'implication elle-même.

Les points de vue ensembliste et de la logique formelle sont absents de l'enseignement secondaire. Pourtant, ils permettent, contrairement au point de vue déductif, de prendre en compte explicitement le cas de la prémisse fausse. Nous

---

[11] « Une *phrase ouverte* est obtenue en appliquant un *prédicat* (nom de propriété ou de relation) à un terme général ou à plusieurs termes dont l'un au moins est général. (Par exemple :) *Un multiple de 5 est un nombre pair* ; *x est supérieur ou égal à 4* ; *une droite D est parallèle à une droite D'*. Une phrase ouverte n'est pas une proposition. Elle définit une propriété ou une relation qui peut être satisfaite par certaines assignations d'objets aux termes généraux et non satisfaite par d'autres. [...] Certaines phrases ouvertes peuvent être
- vraies de tous les objets de l'univers du discours : *un multiple de 6 est un nombre pair*
- fausses de tous les objets de l'univers du discours : *un multiple de 6 est un nombre impair*.
[...] La quantification est une opération logique qui transforme une phrase ouverte en une proposition sous certaines conditions. » (Durand-Guerrier, 2000)

verrons, dans les parties suivantes, que cette réduction de « A=>B » à *« A vraie=>B vraie »* a des conséquences sur les conceptions des élèves sur l'implication.

2. L'objet implication dans quelques manuels

Pour première *approche écologique* de ce concept dans l'enseignement**,** nous avons choisi d'analyser des manuels à deux niveaux très différents : quatrième et DEUG scientifique. En effet, c'est en classe de quatrième que débute l'apprentissage de la démonstration, nous attendions donc une place privilégiée pour le concept d'implication à ce niveau.

D'autre part, les premières années d'études universitaires permettent de donner une signification plus formalisée à l'implication notamment à l'aide de l'introduction de la logique.

Nous avons choisi des manuels pour lesquels l'objet implication ou l'objet équivalence étaient présents dans la table des matières ou l'index (*sous la forme implication, implique, inférence, équivalence, condition nécessaire, condition suffisante, nécessaire, suffisant, réciproque*). Cela nous a permis de repérer les ouvrages dans lesquels l'implication était un objet d'enseignement explicite, et donc de nous intéresser à des formulations explicites de l'implication plus faciles à traiter. Un premier constat est que nous n'avons pas pu étudier des manuels de quatrième récents : ces termes ne figurent pas dans l'index des manuels des années 90 que nous avons considérés.

Dans cette étude, nous voulons étudier la « vie » de l'objet implication dans les institutions « manuels de quatrième » et « manuels de DEUG scientifique ». Nous cherchons à préciser les *situations*, les *concepts*, les *signifiants* et les *signifiés* qui lui sont rattachés. Pour cela nous nous sommes posé les questions suivantes :

Où trouve-t-on l'objet implication ? Comment est-il défini ? A quelles notations est-il rattaché ? A quoi est-il censé servir ? Quel symbolisme et quel vocabulaire lui sont rattachés ?

Dans la suite de l'étude, nous avons utilisé le terme « implication » à la place du terme « objet implication », c'est pourquoi les titres sont au féminin.

2.1. Manuels niveau quatrième.

Références : Hachette (1983). **(H)**
Armand Colin (1979). **(AC)**
Nathan (1988). **(N)**
Istra (1975). **(I)**
Bréard (1971). **(B)**

2.1.1. Où la trouve-t-on ?

En fait, dans (H), (AC), (N) et (B) on ne mentionne pas le mot « implication ». On parle de « réciproque », de « condition nécessaire », de « condition suffisante » et d'« équivalence » (H) ou seulement de « réciproque » et d'« équivalence » (AC, N). D'autre part, dans (B) on remplace le mot « implication » par le terme « inférence ».

On trouve l'implication :

• Dans un *chapitre de logique* : « Notions de logique » (I) ; « Le langage de la logique » (B).

• Dans deux *fiches techniques* (« propriétés réciproques », « propriétés caractéristiques ») appartenant à une série intitulée : « pour justifier et raisonner » (N). Un petit texte théorique est suivi d'exercices d'applications.

• *À l'intérieur du cours* (chapitre de géométrie « le juste milieu » (H) ; chapitre « addition dans D » (AC)), elle est traitée à l'aide d'exemples « activité d'entretien : réciproques ; nécessaire ; suffisant » (H) ; « exemple de démonstration » (AC)).

2.1.2. Comment est-elle définie ?

• Définition issue de la *logique formelle*

(B) est le seul à définir l'implication de façon abstraite sans se baser sur un exemple :

> si lorsqu'une assertion p est vraie, l'assertion q est vraie, on dit que l'assertion p entraîne l'assertion q. [...]
> une inférence est une assertion qui peut exister ou ne pas exister. Pour qu'elle existe, il suffit de prouver que lorsque p est vraie, il en résulte que q est vraie.

Cette définition n'est étayée d'aucun exemple concret, mais il est donné une interprétation ensembliste de l'implication.

• Définitions *basées sur des exemples*

- (I), seul, donne une définition de ***l'implication***. Il se base sur un exemple et relie l'implication à la notion d'inclusion :

> On considère les sous ensembles de N :
> M5 = { x / x∈N, x est multiple de 5}
> N0 = {x / x∈N, x est terminé par 0}
> « Dans N, si x est terminé par 0 alors x est multiple de 5 »
> Cette phrase exprime que dès qu'un élément du référentiel N possède la première propriété alors il possède nécessairement la seconde ; c'est une proposition vraie appelée implication.
> On l'écrit symboliquement :
> (∀x∈N) (x est terminé par 0 => x est multiple de 5) [...]
> *La même phrase exprime aussi que « tout élément de No est aussi élément de M5 » ; ceci se traduit par : « NocM5 », ce qui est vrai.* [...]
> Les exemples précédents nous permettent de dire qu'à une implication on peut associer une inclusion de sous ensembles ; implication et inclusion ont la même valeur logique : elles sont vraies ou fausses en même temps.

Les autres ouvrages (H, AC et N) se basent aussi sur des exemples pour donner les définitions de termes associés à l'implication.

- Après quelques exercices sur les énoncés réciproques et des transformations de propositions sous la forme « si...alors... », (H) s'appuie sur un exemple pour définir les *Conditions Nécessaires* et les *Conditions Suffisantes* :

> Nous dirons que pour que « x^2 -9=0 » soit vraie :
> - la condition x appartient à {3,0,3} est nécessaire c'est-à-dire obligatoirement remplie mais pas suffisante.
> - la condition x=3 est suffisante mais pas nécessaire puisque x peut être aussi égal à -3.
> - la condition x appartient à {-3,3} est à la fois nécessaire et suffisante.

Suivent un exercice pour comprendre la différence entre CN et CS[12] et l'expression des CN et CS dans la vie courante, puis la définition de l'équivalence :

> Au lieu de dire qu'une condition est nécessaire et suffisante, on dit aussi « il faut et il suffit que... » ou bien « ..si et seulement si... ».

- (AC) profite d'un exemple de démonstration pour « définir » *l'équivalence*. Il donne une propriété A :

> a,b,m dans D, si (a=b) alors (a+m=b+m) (admise)

puis donne un exemple de la démonstration de la propriété B :

> Si (a+m=b+m) alors (a=b)

pour aboutir à la conclusion :

> -Chaque étape a été justifiée, la propriété B est démontrée.
> -B est la réciproque de A.
> -Les propriétés A et B étant toutes deux établies on a une équivalence.
> -a,b,m dans D (a=b) équivaut à (a+m=b+m).

On donne donc plus un exemple d'équivalence qu'une définition de celle-ci. De plus la phrase « les propriétés A et B étant toutes deux établies... » n'apparaît pas tout à fait justifiée puisque A a été admise. L'implication est utilisée dans la démonstration sans être explicitée mais on peut quand même la voir transparaître dans la phrase qui précède la démonstration :

> « démontrer » signifie ici, constituer une chaîne d'égalités toutes justifiées par une définition ou une propriété du cours.

et elle apparaît en quelque sorte matérialisée par les flèches montrant le passage d'une ligne à l'autre.

• Dans (N), on utilise la forme « Si ...Alors » pour donner une définition de la *réciproque* et de l'*équivalence* :

[12] Nous noterons CN pour « condition nécessaire » et CS pour « condition suffisante ».

> En mathématiques, la plupart des énoncés peuvent s'écrire sous la forme *si ...alors...* A partir d'une phrase écrite sous la forme « si ...alors... » il est possible d'écrire une nouvelle phrase en intervertissant hypothèse et conclusion .

Suivent des exercices :

> Écris chacune des propriétés suivantes sous la forme « si ... alors », Écris une réciproque de chacune de ces propriétés, sont-elles vraies ou fausses ? "

On peut alors définir l'équivalence dans la fiche suivante:

> Il se peut qu'une propriété soit vraie en même temps que sa propriété réciproque. On dit alors que les deux propriétés sont équivalentes.

2.1.3. À quoi est elle rattachée ?

• Au *raisonnement*, dans un *cadre démonstratif* (en relation avec la géométrie ou avec les décimaux)
- à la fin du chapitre *« le juste milieu »* qui comprend, entre autres, l'inégalité triangulaire, la médiatrice, le losange, la projection orthogonale..., sous le titre « *activité d'entretien : Réciproques ; 'nécessaire' ; 'suffisant'*. ». (H)
- à la fin de deux chapitres de géométrie, dans des fiches intitulées « Pour justifier et raisonner ».(N)
- dans le chapitre « *addition dans D* » au cours d'un « *exemple de démonstration* ».(AC)

• À la *logique* et aux *ensembles*
-dans le paragraphe « *Notions de logique* » inclus dans le chapitre « *révisions et compléments* » (I) et dans le chapitre « *le langage de la logique* » (B).

Ces deux livres donnent une interprétation ensembliste de l'implication : paragraphe « *implication et inclusion* » (I) et tous les exemples de (I) sont rattachés aux ensembles ; paragraphe « *interprétation ensembliste de l'inférence : ...* » (B).

Cependant, alors que dans le second livre (B) le chapitre « *langage des ensembles* » précède l'implication, dans (I) les notions d'ensemble et d'appartenance ne sont pas l'objet d'une définition. C'est peut-être pourquoi dans (B) on se sert de l'implication pour démontrer la transitivité de l'inclusion, alors que dans (I) les ensembles paraissent n'être là que pour donner des exemples concrets.

2.1.4. À quoi est-elle censée servir ?

L'utilisation de l'implication est évidemment liée aux lieux où elle se trouve et aux objets auxquels elle est rattachée.

• Outil pour de futures *démonstrations.* (H, AC, N et I)

En effet, dans (H), la place de l'implication à la fin d'un chapitre de géométrie va dans le sens de cette interprétation ; de même pour (AC) dans lequel on donne une signification de « démontrer » dans un cas précis ; enfin, c'est tout à fait clair dans le cas de (N) d'après le titre des fiches *« Pour justifier et raisonner »* présentes à chaque fin de chapitre.

Dans (I), bien que l'on donne une relation entre inclusion et implication, les ensembles ne semblent être présents qu'à titre d'exemples. Le but recherché serait, ici aussi, l'initiation aux techniques de démonstrations, il y a d'ailleurs à la fin du chapitre un paragraphe nommé : *« Comment utiliser un théorème ? ».*

• Outil à la théorie des *ensembles* et à la démonstration: (B)

Dans le dernier manuel (B), la place du chapitre de logique juste après le chapitre sur les ensembles et la mise en relation constante avec les ensembles montre une utilisation de l'implication « au service » des ensembles. Par exemple, on démontre, grâce à l'implication, la *transitivité et l'antisymétrie de l'inclusion*. Cependant, la volonté d'initiation à la démonstration est aussi présente, comme le montrent les deux paragraphes « *démonstration par inférences successives* » et « *démonstration par contraposition* ».

2.1.5. Quel symbolisme, quel vocabulaire associé ?

• *Aucun symbole*, seulement des *expressions langagières* : (H, AC et N)

Dans ces trois livres, aucun symbole n'est utilisé. Rappelons qu'on n'utilise ni dans l'un ni dans l'autre le terme « implication » mais des expressions associées.

- Dans (H), on parle de *« condition nécessaire »* ou *« suffisante »,* on *utilise « si... alors », « il faut et il suffit »* ou *« si et seulement si »*
- Dans (AC), on ne parlera que d'*« équivalence ».*
- Dans (N) on utilise *« Si ...alors », « propriétés équivalentes », « ...équivaut à... »* ou encore *« propriété caractéristique ».*

• *Un symbole* et *des expressions langagières* : (I), (B)

- (I) fait la transition entre ces trois livres (H, AC et N) et le dernier (B). On y trouve des expressions langagières : *« si...alors », « si et seulement si », « implique », « équivalence logique »* et un symbole mathématique : "=>" (accompagné de ≠>). Notons la présence du symbole *« c »* qui, sans réellement représenter l'implication, lui est explicitement relié.

- (B) a une présentation plus formaliste. Il propose les expressions langagières *« entraîne », « infère », « si* un élément x possède la propriété P**,** *alors* il possède la propriété Q » et le symbole « *I*— ». Ici aussi, on associe l'inclusion et le symbole *« c »* à l'implication.

Remarquons la présence, dans les explications, de tournures langagière représentant une implication non explicitée : « *Pour qu'elle* [l'implication] *existe,* ***il suffit*** *de prouver que lorsque p est vraie, il en résulte que q est vraie* » ; « *Si le théorème... existe, alors on peut dire…* »

Notons que les expressions *« Pour que...il faut que... »* et *« Pour que...il suffit que... »* sont absentes de tous ces manuels.

Ajoutons que la phrase de (I) « *la forme propositionnelle placée <u>avant</u> => est appelée <u>hypothèse</u>, celle placée <u>après</u> 'c<u>onclusion</u>'* » pourrait amener à confondre hypothèse et conclusion dans la tournure « pour que...il faut que... ».

2.2- Manuels de niveau DEUG scientifique

Références : Lelong Ferrand Arnaudiès T1 (1974). **(LFA)**
Arnaudiès Fraysse T1 (1996, 1° édition en 1987). **(AF)**
Ramis Oddoux Deschamps T1 (1°éd. conforme aux prog 72). **(ROD)**
Calvo (1996). **(C)**
Pichon (1989). **(P)**
Flash U (1993). **(FU)**
Liret Martinais. **(LM)**
Letac (1984).**(Le)**
Lehman T1 (1984). **(L)**

2.2.1. Où la trouve-t-on ?

La place de l'implication est moins imprécise dans les manuels de DEUG que dans ceux de quatrième, celle-ci n'apparaît plus « n'importe où ». Nous ne l'avons trouvée, en particulier, que dans des ouvrages d'algèbre.

Elle apparaît dans trois sortes de chapitres suivant l'utilisation qu'ont voulu en faire les auteurs du manuel : théorie des ensembles, logique formelle ou raisonnements mathématiques. Nous avons donc classé les manuels précédents en trois types.

• 1- L'implication comme outil à la *théorie des ensembles*. (LFA, AF, ROD, C)

Dans (LFA), (AF) et (ROD), elle est définie dans le *premier chapitre* du premier tome et elle n'apparaît plus explicitement après.

• 2- L'objet de la *logique formelle*. (P, FU)

La logique paraît considérée en tant que telle et pas seulement comme outil.

Dans ces deux ouvrages, un chapitre entier est consacré à la logique et à l'implication et, bien que celle-ci soit reliée à la théorie des ensembles dans la table des matières, elle ne lui est pas "dédiée".

• 3- L'implication comme outil pour le *raisonnement mathématique*. (L, LM, Le)

La logique est enseignée, généralement en *début d'ouvrage*, dans le but prédominant de l'utiliser dans les raisonnements mathématiques.

2.2.2. Comment est elle définie ?

Les définitions sont différentes selon les manuels, tantôt plutôt en rapport avec la *logique formelle*, tantôt plutôt en rapport avec le raisonnement déductif mais *jamais en rapport avec les ensembles*. Ces définitions sont beaucoup plus explicites et complètes que dans la plupart des manuels de quatrième. Il ne paraît plus être question, ici, d'introduire l'implication (celle-ci est souvent considérée connue), mais de donner une définition plus formelle et plus complète ou encore un nouveau point de vue sur un objet que les étudiants utilisent déjà.

Nous citons en italique et entre guillemets[13] des définitions de l'implication extraites des manuels.

Définitions issues de la logique formelle (LFA, AF, ROD, C, P, FU)

Étant données deux relations A et B, la relation ((non A) ou B) s'appelle l'implication de B par A et se note : A=>B . (LFA)

Soient A et B deux assertions. On constate que les tableaux ci-dessous, qui sont dits tables de vérités, permettent de leur associer cinq nouvelles assertions qui sont notées : ¬A, A3B, A£B, A=>B, A≠>B [suivent les tables de vérité] Les symboles ¬, 3, £, =,≠ sont appelés connecteurs logiques de négation, de conjonction, de disjonction, d'implication, d'équivalence logique. (ROD)

La proposition (Q ou (¬P)) se note (P=>Q) et s'appelle l'implication de Q par P ; cette proposition est fausse si P est vraie et Q est fausse, elle est vraie dans tous les autres cas. La proposition P=>Q se lit « P entraîne Q » ou « Q est conséquence de P » ou encore « Q résulte de P » . (C)

Si A et B sont des propositions, « A=>B » en est une (=> se lit « entraîne ») (...) Voyons maintenant la table de vérité de A=>B ; elle contient deux cas qui donnent à réfléchir : (...) On voit que cette table affirme que si A est fausse (O), alors A=>B est vraie, que B soit vraie ou fausse ! (P)

Définitions pour l'utilisation du raisonnement déductif

Si P et Q sont des propositions, la proposition « si P, alors Q » exprime que si P est vraie, alors Q est vraie aussi. Les propositions de ce type sont tellement utilisées qu'on leur a donné un nom : on les appelle des implications. La proposition « si P, alors Q » peut aussi s'exprimer par « P implique Q » ou encore par « P donc Q ». Lorsque les propositions P et Q sont constituées de symboles mathématiques et seulement dans ce cas, on peut utiliser le signe => qui se lit « implique » et l'on écrit P=>Q pour exprimer que la proposition P implique la proposition Q. (...) Si P et Q sont des propositions, la proposition (P=>Q) est vraie seulement dans l'un des cas suivants : ou bien P et Q sont vraies, ou bien P est fausse. Ainsi (P=>Q) est vraie si et seulement si l'une des propositions non(P) ou Q est vraie. (...) En particulier, si la proposition P est fausse, alors la proposition (P=>Q) est vraie. (LM)

Si A et B sont deux affirmations, l'écriture A=>B signifie « Si l'affirmation A est vraie, alors l'affirmation B est vraie ». (Le)

Soit P et Q des propositions. On appelle implication de Q par P et on note P=>Q la proposition qui est fausse si P est vraie et Q est fausse, et qui est vraie dans les autres cas. (...) Attention : => est un symbole qui ne doit s'utiliser que dans une formule propositionnelle. Il ne faut donc pas le confondre avec le mot « donc », mot de la langue ordinaire, qui sert à décrire une étape d'une démonstration : si dans la suite des propositions vraies d'une théorie mathématique figurent la proposition P et la proposition P=>Q, alors on peut conclure que Q est vrai :
- P
- P=>Q
- donc : Q

[13] C'est nous qui soulignons.

> La règle qui permet de passer de P et P=Q à Q s'appelle règle de détachement.
> **N'employez jamais** = **à la place de** donc.[14] (L)

À la suite de ces définitions, nous voulons souligner trois points :
• La propriété : *« Si P est fausse alors P implique Q est vraie »* est présentée comme un cas « qui donne à réfléchir ». (P, FU, LM)
• « P implique Q » est parfois traduit par *« Si P est vraie alors Q est vraie aussi »* (LM, Le)
• Un manuel traduit « P implique Q » par *« P donc Q »* (LM)

Dans ces deux derniers points, les écritures associées à l'implication induisent le fait qu'on ne considère que le cas où la prémisse est vraie.

Quelques remarques sur les exemples accompagnant les définitions

Les exemples sont quasiment absents : aucun exemple dans (ROD, LFA, Le, LM) ; un seul exemple dans (C, AF) ou alors ils sont « exotiques » au vu de la pratique courante des mathématiques : *cadre propositionnel, prémisse fausse, pas de lien explicatif* entre P et Q.

> Par exemple, « 5 est un nombre pair »=« 3 est un nombre pair » est vraie. (C)
> Si 0=0 alors 1=1. Si 2=-2 alors 4=4. (L)
> ($\sqrt{2}>0 \Rightarrow 1>0$), ($\sqrt{2}<0 \Rightarrow 1>0$). (FU)

Il nous semble que ces exemples sont « anecdotiques », qu'ils ne permettent pas de donner un sens à l'outil, et qu'ils ne fournissent pas d'indices pour une utilisation de l'implication dans la pratique des mathématiques.

Un exemple de (P) du même type est remarquable par l'explication qui suit l'exemple :

> Par exemple, l'énoncé $(-1>0) \Rightarrow (1<0)$ est vrai car c'est un cas particulier de la règle $(x>0) \Rightarrow (-x<0)$ qui est tout à fait correcte, mais bien sûr $-1>0$ est faux, ce qui fait qu'on ne peut accorder aucun crédit à la conséquence $1<0$.

Bien que l'auteur ait donné la propriété « Si P est fausse alors P implique Q est vraie », il ne l'utilise pas pour statuer sur la vérité de l'implication et préfère pour cela *s'appuyer sur un lien explicatif*. Un deuxième exemple avec une explication du même type suit. L'usage mathématique de l'implication est donc celui de l'explication de la vérité de Q par celle de P.

2.2.3. À quoi est-elle rattachée ?

• *Théorie des ensembles* et *logique* formelle : (LFA, AF, ROD)
L'implication est reliée aux ensembles par sa place au sein du chapitre sur la théorie des ensembles. Celui-ci commençant par un petit paragraphe de logique, elle est aussi rattachée aux éléments suivants : quantificateurs, connecteurs logiques, contraposée et raisonnement par l'absurde.

---

[14] En gras dans le manuel.

(C) relie l'implication à ces mêmes éléments. Notons que cet ouvrage confond contraposée et raisonnement par l'absurde.

• *Logique* formelle, *théorie des ensembles* et *raisonnement mathématique* : (P, FU)
La place de la logique est, ici, plus importante, on trouve par exemple les titres de paragraphe suivants : « *Règles de construction de phrases mathématiques correctes* », « *Vérité d'une proposition mathématique* ».

Des moyens pour utiliser ces éléments de logique dans le raisonnement mathématique suivent : « *Quelques types de raisonnements fréquemment utilisés* » ; « *Logique du raisonnement mathématique. Méthodes usuelles de démonstration* » ; « *Les démonstrations indirectes* ». On y trouve en particulier les raisonnements par contraposition et par l'absurde.

• *Raisonnement mathématique* et *logique* formelle : (LM,L)
Un peu de calcul propositionnel permet l'utilisation de l'implication dans les raisonnements mathématiques. L'implication est donc rattachée aux éléments suivants : énoncés, connecteurs, équivalence, quantificateurs, raisonnements cas par cas (LM), par contraposée, par l'absurde , par récurrence.

Notons que les propriétés de l'implication ne sont pas utilisées explicitement pour montrer des propriétés de l'inclusion dans le chapitre *« ensembles et application »* (LM), contrairement à ce qui est fait dans les ouvrages du premier groupe.

• (Le) ne s'appesantit ni sur la logique ni sur le raisonnement puisqu'il n'y a qu'une trentaine de lignes consacrées à l'implication. Là non plus, l'utilisation de l'implication dans le deuxième paragraphe : « *Théorie des ensembles* » ne sera pas explicite.

2.2.4. À quoi est-elle censée servir ?

• *Propriétés de l'inclusion* et *raisonnement mathématique* : (LFA, AF, ROD, C)
L'implication sert, dans le paragraphe de logique, à définir ***l'équivalence***, la *contraposée* et le raisonnement par *l'absurde*. Mais, l'implication semble être surtout un outil pour définir l'**i***nclusion* d'un ensemble dans un autre :

> Soient E et F deux ensembles. nous écrirons E cF (E est inclus dans F, ou E est une partie de F), pour exprimer la relation : pour tout x, ... (LFA).

Par exemple, dans (LFA) et (AF) on montrera la transitivité de l'implication pour pouvoir montrer la transitivité de l'inclusion plus tard.

• *Raisonnement mathématique* et *aide aux étudiants* : (P, FU)
La préoccupation principale semble être de donner, grâce à l'implication, des méthodes de raisonnements mathématiques **:** « *quelques types de raisonnements fréquemment utilisés* » (P) ; « *Logique du raisonnement mathématique. Méthodes usuelles de démonstration* » (FU).

Dans (P), en particulier, ressort le désir d'expliquer l'implication en « profondeur » pour éviter les erreurs courantes des élèves. C'est pourquoi nous trouverons fréquemment des phrases d'explications :

> On voit que cette table affirme que si A est fausse (o), alors A=>B est vraie que B soit vraie ou fausse ! C'est très surprenant au premier abord. Il faut bien comprendre la différence qu'il y a entre la proposition logique A=>B et l'utilisation faite dans le raisonnement mathématique de A=>B.
> En maths, le plus souvent A=>B est utilisée dans le cas où A est connue comme étant vraie afin d'en déduire B ; donc on ne conçoit pas, dans ce cas, de partir d'une proposition qui serait fausse. Souvent, quand nous écrivons A=B, nous voulons dire en fait A vraie => B vraie, ce qui est différent dans une étude rigoureuse de la logique ; mais alors le raisonnement mathématique ne dit rien de ce qui se passe si A est faux !

ou encore :

> (...) Ceci n'est pas une discussion stérile car les copies d'élèves contiennent malheureusement parfois des erreurs de logique de ce genre ; il est possible que ceci ne suffise pas à éviter ce genre de fautes, mais cela devrait aider à comprendre pourquoi le correcteur est quelquefois obligé de refuser une « démonstration » d'un élève, soit parce qu'elle est fausse du fait d'une prémisse fausse, soit parce qu'une prémisse A non établie est utilisée pour démontrer B ; si l'on n'a pas démontré que A, même si l'on a très correctement montré que A=>B, on ne peut pas accepter de considérer B comme démontrée.

Il semblerait donc qu'il y ait *deux objets implication distincts*, suivant que l'on est dans le *cadre démonstratif* ou dans le *cadre logique*. Il apparaît, de plus, que le premier (cadre démonstratif) serait *moins rigoureux* que le second (cadre logique).

(FU) laisse une plus grande place à la logique et se rapproche du premier groupe par son troisième chapitre « *Notions fondamentales de la théorie des ensembles* ». On utilise alors l'implication pour définir la transitivité de l'*inclusion* ou pour démontrer des propriétés liées à l'intersection et à l'inclusion d'ensembles.

• *Aide aux élèves* et *raisonnement mathématique* : (LM, Le, L)
Le but « scolaire » de la définition de l'implication s'affirme encore plus que précédemment : on la trouve, par exemple, dans le chapitre « *s'exprimer en mathématiques* » (LM).

(Le) ne propose qu'un très succinct paragraphe sur l'implication qui semble avoir pour but de faire le point sur ce qu'il est nécessaire que l'étudiant sache en début de première année de DEUG.

2.2.5. Quel symbolisme, quel vocabulaire associé ?

• *Prédominance du symbolisme*
Dans le premier groupe (LFA, AF, ROD et C), l'implication A=B est définie par ***((non A) ou B)*** (notons que dans (ROD), elle est d'abord définie par sa table de vérité). Pour cette définition, les symboles logiques ne sont utilisés que dans (ROD): « ((¬A)£B) » et (C) : « B ou(¬A)) ».

Dans ces quatre livres on utilise le symbole « => », mais seuls les deux derniers (ROD et C) se servent des *tables de vérités*. Les expressions langagières sont quasiment absentes : seule l'expression « A implique B » se trouve dans (LFA), (AF) et (ROD) alors que (C) ne propose que « P entraîne Q », « Q est conséquence de P » ou encore « Q résulte de P ».

Cependant dans le texte nous remarquons des phrases qui sont des implications en langage commun mais qui ne sont pas « traitées » en tant que telles : « *Si A est vraie et si A=>B est vraie, alors B est vraie* » (AF) ; « *(...) cette proposition est fausse si P est vraie et Q est fausse (...* » (C). L'implication est donc déjà présente dans le langage usuel et sa compréhension va de soi mais rien ne permet un lien avec « l'implication mathématique » définie. Pourtant pour définir certaines « implications mathématiques » on utilisera le langage courant, même pour alléger le texte cela peut paraître contradictoire...

• *Symbolisme* et *expressions langagières*

(P) et (FU) définissent tout d'abord l'implication par sa *table de vérité*, nous trouverons ensuite les symboles logiques : « A=>B ↔ B ou Non A » (P) ; « (P=>Q)≠>(¬P£Q) » (FU). Mais dans ces deux livres, les expressions empruntées au langage courant sont beaucoup plus présentes que dans les précédents :

> Dans (P) on trouvera : « *=>se lit "entraîne* » ; « *La phrase 'A => B' se lit aussi 'si A, alors B'* » et, dans le paragraphe sur les raisonnements fréquemment utilisés, on trouvera les expressions : « *il faut que* » ; « *il suffit que* » ; « *une condition nécessaire pour que* » ; « *une condition suffisante pour que* ». (FU) propose l'expression : « *Q est une conséquence* de P* » *(* conséquence au sens mathématique pas au sens ordinaire)* ajoutée aux précédentes.

• *Prédominance des expressions langagières*

Les ouvrages du troisième groupe traitent tous les trois de l'implication presque uniquement du côté du langage commun. Ils n'utilisent aucun symbole autre que « => » et, seul, (L) présente (en exercice) les tables de vérité.

(LM) et (Le) définissent l'implication uniquement grâce à l'expression « si...alors... » On pourra noter que (LM) donne comme expressions synonymes : « *P implique Q* » ; « *P donc Q* ».

> (L) ne propose aucune formule langagière de l'implication dans les définitions (l'expression « si...alors » est considérée connue), le lien sera fait dans les exercices. De plus, dans les exercices on verra apparaître les expressions : « i*mplique* » ; « *si...alors* » ; « *pour que...il suffit que* » ; « *pour que...il faut que* » ; « *une condition suffisante pour que* » ; « *une condition nécessaire pour que*

Les expressions langagières associées à l'implication varient beaucoup d'un manuel à l'autre : parfois absentes, parfois nombreuses, parfois de synonymie immédiate avec « implique », parfois recherchées. Nous les avons classées dans le tableau suivant :

	(C)	(P)	(FU)	(LM)	(Le)	(L)	(ROD)	(AF)	(LFA)
P implique Q			oui	oui		oui	oui	oui	oui
P entraîne Q	oui	oui	oui						
P donc Q				oui					
Q conséquence de P	oui		oui						
Q résulte de P	oui								
Si P alors Q		oui	oui	oui	oui	oui			

Pour que...il faut que...		oui	oui			oui			
Pour que...il suffit que...		oui	oui			oui			
Condition nécessaire		oui	oui			oui			
Condition suffisante		oui	oui			oui			
P seulement si Q									
P=Q	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui

Les expressions « Si...alors... » et « P=>Q » sont prédominantes (cinquième et dernière lignes). D'ailleurs, pour les implications en langage commun dans les manuels, la tournure « Si...alors... » est aussi l'expression la plus souvent employée.

En revanche, « P donc Q », « Q résulte de P » et « Q conséquence de P » sont les moins présentes. Pour la première expression, plusieurs manuels insistent sur la différence entre « P implique Q » et « P donc Q », il est donc normal de ne pas la trouver comme expression synonyme.

D'autre part, nous constatons que les expressions pour lesquelles on écrit Q avant P (« Q résulte de P » et « Q conséquence de P ») sont absentes . Ces écritures *inversent l'ordre de la prémisse P et de la conclusion Q* par rapport aux expressions de base « P implique Q », « P entraîne Q », « P=Q », « si P alors Q »…. Leur utilisation nécessite donc une *reconstruction* de la phrase. Nous faisons l'hypothèse que c'est peut-être cette complexité de reconstruction qui est à l'origine de l'absence de ces expressions dans les manuels. En effet, dans ces deux expressions la « conclusion » se trouve après l'« hypothèse », ce qui est contraire à l'habitude et, en particulier, contraire à l'utilisation de « si...alors... ». Cette nouvelle tournure peut être source de difficultés notamment dans la reconnaissance de l'« hypothèse et de la conclusion ».

Ce phénomène a été soulevé par Duval à propos de problèmes de *congruences* (Duval 1988, cité dans Durand-Guerrier 1999, p. 164). Il a été repris dans sa thèse par Durand-Guerrier. Enfin, Rolland (1999) montre son importance pour certains étudiants de l'université.

Cependant, les expressions « pour que Q il suffit que P » et « Q est condition nécessaire pour P » amènent la même difficulté et sont pourtant plus représentées...

Enfin, l'expression « P seulement si Q » n'est jamais présente. Nous faisons l'hypothèse que c'est la trop grande différence entre l'utilisation mathématique et le sens, parfois ambigu, dans le langage courant qui pousse les auteurs à ne pas l'utiliser.

Pour conclure, nous voulons souligner quelques résultats de cette analyse.

• *Le point de vue ensembliste est quasiment absent*

Aucun manuel, de DEUG ou de quatrième, n'utilise les ensembles comme outils. Même lorsqu'une interprétation ensembliste est donnée, les ensembles ne sont que des supports visuels qui permettent de représenter l'implication.

• *Il y a un cloisonnement des points de vue*

Les définitions sont différentes pour des buts différents : définitions liées au raisonnement déductif pour l'implication dans la démonstration ou liées à la logique formelle pour la théorie des ensembles. Mis à part certains manuels de DEUG (par exemple (FU) et (P)), ces deux points de vue ne sont pas mis en relation.

3. Analyse de trois items du questionnaire.

Nous voulons, dans cette troisième partie, essayer de cerner certains aspects du *rapport personnel* à l'objet implication qu'ont des étudiants, futurs enseignants. Nous analysons ici l'interview de quatre étudiants, deux garçons et deux filles, d'un niveau en mathématiques supérieur à la maîtrise. Leur façon d'appréhender l'implication est donc celle d'étudiants « avancés », et celle de jeunes professeurs. Nous pouvons penser que les conceptions qu'ils ont sont voisines de celles qu'ils transmettront à leurs élèves implicitement ou non. Cette partie est issue du troisième chapitre de notre mémoire (Deloustal, 1999) dans lequel nous voulions repérer des *propriétés-en-acte* présentes ou au contraire absentes chez ces futurs enseignants. Nous voulions observer, comment ils s'en servaient, dans quelles circonstances, si elles *cohabitaient*, s'il y avait des *invariants*.

Pour permettre ceci, notre expérimentation comportait deux temps. Nous avons d'abord construit un questionnaire qui concernait aussi bien l'objet mathématique que son utilisation en tant qu'outil. Il a été soumis aux étudiants individuellement pendant une durée de deux heures. Au vu des premiers résultats aux questionnaires, nous avons alors mis en place un débat entre les quatre étudiants d'une durée de deux heures. Cela nous a permis de confronter des propriétés-en-acte, notamment (P3a) et (P3b), et de repérer la « résistance » de certaines propriétés notamment (P2).

Notre étude des manuels, nos remarques sur la logique naturelle et notre propre appréhension de l'implication nous ont permis de formuler quelques propriétés-en-acte pouvant apparaître.

Pour faciliter notre analyse, nous avons classé et numéroté ces propriétés-en-acte, nous aurons recours à cette numérotation dans ce qui suit.

Propriété-en-acte 1 **(P1)** : « A=>B » n'a d'utilité (et/ou de sens) que lorsque A est vraie.

Propriété-en-acte 2 **(P2)** : « A=>B » n'a de sens que si A et B ont un lien de cause à effet.

Propriétés-en-acte 3 **(P3)** : Nous regroupons sous ce numéro toutes les propriétés-en-acte ayant trait à la vérifonctionnalité de l'implication, c'est-à-dire découlant uniquement des valeurs de vérité de la prémisse et de la conclusion[15]. En particulier, (P3) comprend les propriétés-en-acte :

Si A est fausse alors « A=>B » est vraie. (P3a)
Si A est fausse alors « A=>B » est fausse.(P3b)

Nous ne reprenons, dans cet article, que l'étude de certaines questions associées plus particulièrement aux propriétés-en-acte (P1) et (P2)[16].. Par souci de concision, nous ne nous intéresserons qu'aux réponses au questionnaire et ne traiterons pas celles données lors du débat.

Ces propriétés (P1) et (P2) sont très fortement « soutenues » par la logique naturelle. Cependant, ces propriétés appliquées au domaine mathématique peuvent

[15] Ces propriétés-en-acte ont été traitées plus en détails dans notre mémoire de DEA (Deloustal, 1999).
[16] Une étude sur l'apparition et sur l'éventuelle mise en conflit ou cohabitation des autres propriétés en acte a été faite dans notre mémoire de DEA (Deloustal, 1999).

amener des difficultés, des inexactitudes voire même des erreurs lors d'une résolution de problème. Nous y reviendrons à la suite de l'étude des questions.

3.1- Analyse préalable de trois items du questionnaire

Question 1-2

Que pensez-vous des implications suivantes ?

Soit $k \in N$ quelconque,	**Vrai**	**Faux**	**NP**[17]	**NS**[18]
a) k pair ⇒ k+1 pair				
b) k pair ⇒ k+1 impair				
c) k impair ⇒ k+1 pair				
d) k impair ⇒ k+1 impair				
a') 3 pair ⇒ 4 pair				
b') 3 pair ⇒ 4 impair				
c') 3 impair ⇒ 4 pair				
d') 3 impair ⇒ 4 impair				

Justifiez vos réponses.

Cet item a été construit pour permettre de problématiser les propriétés-en-acte liées à la vérifonctionnalité (deuxième tableau) mais aussi pour permettre un débat sur la question de la lecture implicite de l'implication sous forme *universellement quantifiée* (premier tableau) (Durand-Guerrier, 1999).

En effet, il y a deux réponses possibles à ce premier tableau suivant le statut que l'on donne à k :

- Première réponse :

Soit $k \in N$ quelconque,	Vrai	Faux	NP	NS
a) k pair ⇒ k+1 pair		*		
b) k pair ⇒k+1 impair	*			
c) k impair ⇒ k+1 pair	*			
d) k impair ⇒ k+1 impair		*		

17 Nous écrivons NP pour « on ne peut pas savoir »

18 Nous écrivons NS pour « je ne sais pas répondre »

Cette réponse sous-entend qu'on a *implicitement quantifié universellement* les phrases du tableau. On donne alors en a) la valeur de vérité de la phrase suivante : *« $\forall k \in N$ k pair $\Rightarrow$ k+1 pair ».* Cette phrase est évidemment *fausse* puisqu'il existe un contre-exemple : k=4. On donne, de la même façon, des valeurs de vérité aux autres phrases. Ce point de vue reflète une pratique mathématique courante et souvent inconsciente.

- *Deuxième réponse*

Soit $k \in N$ quelconque,	Vrai	Faux	NP	NS
a) k pair $\Rightarrow$ k+1 pair			*	
b) k pair $\Rightarrow$k+1 impair	*			
c) k impair $\Rightarrow$ k+1 pair	*			
d) k impair $\Rightarrow$ k+1 impair			*	

Cette réponse suppose un autre point de vue, on ne suppose pas ici une quantification universelle implicite***, k est un élément générique fixé que l'on ne connaît pas***. On donne alors en a) la valeur de vérité de la phrase : ***« Soit k fixé (que je ne connais pas) k pair $\Rightarrow$ k+1 pair ».*** Or ici, cette implication peut être *soit vraie soit fausse* : si k=2 cette implication est fausse, mais si k=3 cette implication est vraie (puisque sa prémisse est fausse). Nous sommes dans le cas où l'on ne peut pas répondre si l'on ne connaît pas la parité de k. On répond de la même façon à d). Les phrases b) et c) sont vraies quelle que soit la parité de k.

Ces deux réponses peuvent être *également considérées comme justes,* suivant le point de vue que l'on adopte, c'est-à-dire suivant que l'on considère que ce sont des phrases implicitement universellement quantifiées ou que ce sont des instances avec des éléments génériques.

Cependant, remarquons que le point de vue de la première réponse ne convient pas pour répondre au deuxième tableau. Dans le deuxième tableau, nous avons, en effet, un élément k fixé et nous nous retrouvons donc dans un cas particulier de la deuxième réponse au premier tableau.

Nous voulions donc attirer l'attention sur cette quantification universelle, le plus souvent implicite, de l'implication. Cependant, par souci de concision, nous ne nous intéresserons pas à cet aspect-là dans cet article[19] et nous nous concentrerons sur l'étude des utilisations des propriétés-en-acte (P1) et (P2).

Pour la deuxième partie de cette question, nous attendons trois types de réponses :

-1) *Utilisation du premier tableau* (réponse fausse)

[19] Pour plus de détails sur cet aspect de cette question, se reporter à notre mémoire de DEA (Deloustal, 1999).

a') 3 pair ⇒ 4 pair		*		
b') 3 pair ⇒ 4 impair	*			
c') 3 impair ⇒ 4 pair	*			
d') 3 impair ⇒ 4 impair		*		

Justification : On reprend le tableau précédent, ici k=3.

-2) Utilisation de « ***Si A est fausse, alors 'A=>B' est vraie*** » (P3a) (réponse juste)

a') 3 pair ⇒ 4 pair	*			
b') 3 pair ⇒ 4 impair	*			
c') 3 impair ⇒ 4 pair	*			
d') 3 impair ⇒ 4 impair		*		

Plusieurs justifications pour c') et d') sont possibles.
Pour c') : une des propriétés-en-acte liées à la vérifonctionnalité (P3) ; utilisation de c) dans le cas où k=3.

Pour d') : une des propriétés-en-acte (P4c) liées à la vérifonctionnalité ; utilisation de « deux nombres consécutifs ont des parités différentes ».

-3) Utilisation de ***« Si A est fausse, alors 'A=>B' est fausse »*** (P3b) (réponse fausse)

a') 3 pair ⇒ 4 pair		*		
b') 3 pair ⇒ 4 impair		*		
c') 3 impair ⇒ 4 pair	*			
d') 3 impair ⇒ 4 impair		*		

Les justifications de a') et b') peuvent être autres que l'utilisation de la propriété-en-acte (P3b).
Par exemple : « a') est fausse car 2 nombres consécutifs n'ont pas la même parité » ; ou encore « b') est fausse car '4 impair' est faux ».
Les justifications possibles pour c') et d') sont les mêmes qu'à la réponse précédente.

On peut aussi justifier la vérité de b') par la vérité de sa *contraposée*. On obtient alors une variante à une réponse du type 3.

On peut bien sûr avoir d'autres réponses, en particulier, la présence des cases « Je ne sais pas » et « On ne peut pas savoir » peut inciter certains élèves à les utiliser.

Les justifications à une même réponse peuvent aussi être variables, les élèves pouvant utiliser conjointement certaines propriétés-en-acte et le tableau précédent.

Question 1-3

Voici trois phrases :

P1 : « Le soleil est une étoile »

P2 : « Il fait jour »

P3 : « Il fait nuit »

Y a-t-il des implications entre ces phrases que vous considérez vraies ?

Y a-t-il des implications entre ces phrases que vous considérez fausses ?

Justifiez vos réponses.

Nous avons construit cette question pour essayer de problématiser la propriété-en-acte de causalité. Pour cela, nous avons choisi des propositions telles qu'il existe un cheminement explicatif possible mais non évident entre les deux propositions P2 et P1. De plus, les propositions P2 et P3 sont construites de telle façon qu'elles impliquent mathématiquement la proposition P1 par le même argument mais qu'il ne paraît pas exister de lien explicatif entre P3 et P1.

Remarque. Un cheminement explicatif attendu qui fait passer de P2 à P1 est :

> « Il fait jour donc une étoile éclaire la Terre. Or, seul le soleil est susceptible d'éclairer la Terre. Donc le soleil est une étoile »

Notons que nous parlons de « cheminement explicatif » menant de P2 à P1, car nous ne pouvons dire que P2 est la cause de P1. En effet, il y a, dans cette réponse, un raisonnement déjà mathématique qui ne traduit pas seulement une relation de cause à effet. Sinon, la réponse serait P1=>P2 car le soleil est la cause du jour. Cependant, nous pensons que cette réponse dépend bien de la propriété-en-acte que nous avons appelée de causalité, même si ce n'est pas réellement la cause qui est en jeu, car elle montre la recherche d'un cheminement « logique » pour passer de P2 à P1.

Les types de réponses attendues sont :

-1) Utilisation de *« Si B est vraie, alors A=>B est vraie »*

P2=>P1 est vraie.

P3=>P1 est vraie.

Pour les autres implications, on ne peut pas savoir ne connaissant pas les valeurs de vérité de P2 et P3.

Variante. On considère que la phrase « il fait jour » se traduit par « il fait jour ici et maintenant » et donc que *P2 est vraie* et P3 est fausse, on a donc les implications suivantes en plus :

P1=>P2 est vraie.

P1=>P3 est fausse.

P2=>P3 est fausse.

P3=>P2 est vraie.

-2) Utilisation de le propriété-en-acte de *causalité* (P2) et de *« A=>(Non A) est fausse quelle que soit la proposition A »*

P2=>P1 est vraie. Car il existe un cheminement logique menant de P2 à P1 (cf. ci-dessus).

P3=>P1 est fausse. Car si le soleil n'existait pas il ferait nuit quand même.

P2=>P3 est fausse. Car P3 et P2 ne peuvent être vraies simultanément.

P3=>P2 est fausse. Car P3 et P2 ne peuvent être vraies simultanément.

P1=>P3 est fausse.
P1=>P2 est fausse.
Variante. Il n'y a aucune implication entre ces phrases qui n'ont rien à voir. On peut juste dire que :
P1=>P2 est fausse
P2=>P1 est fausse.

Bien évidemment, cette liste de réponse n'est pas exhaustive. On pourrait imaginer des variantes suivant les propriétés liées à la vérifonctionnalité utilisées ou des réponses qui mêlent différentes propriétés-en-acte.

Nous faisons l'hypothèse que « P2=>P3 » et « P3=>P2 » vont souvent être données pour fausses. En effet, elles ne sont vraies que lorsque leur prémisse est fausse : un cas peu envisagé dans la pratique mathématique.

Question 7

> Dans un manuel (Algèbre générale par A. Calvo et B. Calvo, Masson), on a trouvé la phrase :
> « [la proposition] '5 est un nombre pair' ⇒'3 est un nombre pai' est vraie ».
> Qu'en pensez-vous ?

Nous citons le manuel afin de déstabiliser une réponse spontanée : « c'est faux » ou « ça n'a pas de sens ». En effet, nous faisons l'hypothèse qu'un étudiant ne met pas naturellement en doute les écrits d'un manuel.

Nous attendons quatre types de réponses :
-1) *Vérifonctionnalité* (A=>B ne dépend que des valeurs de vérité respectives de A et de B et non de leur contenu):

Nous prévoyons deux cas :
• C'est vrai car « 5 est un nombre pair » est une proposition fausse et qu'on peut utiliser le théorème : Si P est faux alors « P=>Q » est vraie. (réponse juste)
• C'est faux parce que la prémisse et/ou la conclusion sont fausses.
-2) *Cause à effet* (« Une implication est régie par un lien de cause à effet entre la prémisse et la conclusion » (P2))
C'est vrai : Supposons que 5 est pair. Deux nombres k et k-2 ont même parité. Donc 3 est pair.
-3) Utilisation de la *Contraposée*
C'est vrai car la contraposée « 3 est un nombre impair => 5 est un nombre impair » est vraie. (réponse juste)
-4) *Prémisse fausse* dénuée de sens (« A=B n'a de sens que lorsque A est vraie » (P1)) :
On ne peut pas répondre, ça n'a pas de sens car « 5 est un nombre pair » est faux.

Les deux premiers types de réponse nous paraissent les plus probables.
Remarquons que la propriété-en-acte « lien de cause à effet » peut très bien cohabiter avec la propriété-en-acte « prémisse fausse donc implication fausse ». En effet, on peut attendre une réponse du type :
« C'est faux car '5 est pair est faux'. Mais si on suppose que 5 pair est vrai alors l'implication est vraie car k et k-2 ont même parité ».

Cette cohabitation est favorisée par la réponse donnée par le manuel.

3.2- Analyse des réponses au questionnaire

Le deuxième tableau (question 1-2)

Les réponses au deuxième tableau font apparaître deux binômes :
- Le premier utilise la propriété-en-acte « l'implication est vraie dès que la prémisse est fausse » (P3a) (Clara et Xavier). (Réponse conforme à la réponse 2 attendue)
- Le second utilise la propriété-en-acte « l'implication est fausse dès que la prémisse est fausse » (P3b) (Sarah et Simon). (Réponse conforme à la réponse 3 attendue)

La *contraposée n'est pas utilisée* (même pour résoudre b').

*La vérifonctionnalité de l'implication n'est pas reconnue en tant que telle***.**

- Soit sa connaissance est réduite à la connaissance de la propriété-en-acte « Si P est fausse alors P=Q est vraie » (P3a) (Clara et Xavier). Cette propriété-en-acte paraît alors être utilisée hors de tout contexte et non pas comme faisant partie des propriétés de vérifonctionnalité de l'implication. Cependant, notons que l'utilisation d'autres propriétés-en-acte liées à la vérifonctionnalité apparaît à la fin du questionnaire lors de l'entretien :

> X : (il parle de la question c') Maintenant, j'aurais tendance à changer mon fusil d'épaule : Il y a une implication et "4 pair" est vraie, donc je pense que c'est vrai.
> V : Il y a une implication dont la conclusion est vraie, alors tu penses que l'implication est vraie. C'est ça?
> X : Oui. Ensuite pour d'), il y a un truc vrai qui implique un truc faux et ça c'est pas possible!

- Soit elle est tout à fait ignorée (Sarah et Simon). En effet, l'utilisation de la propriété-en-acte « Si P est faux alors P=Q est fausse » (P3b), semble plutôt relever d'une question sur le sens d'une implication dont la prémisse est fausse que de l'utilisation de la vérifonctionnalité.

• Les manques de connaissances sur la vérifonctionnalité de l'implication obligent à la cohabitation de la propriété-en-acte « Si P est fausse alors P=>Q est vraie » (P3a) avec une propriété-en-acte de causalité. C'est-à-dire que, dès que la prémisse est vraie et que (P3a) n'est pas utilisable, il faut recourir à l'utilisation d'un lien explicatif entre la prémisse et la conclusion pour montrer que l'implication est vraie.

Par exemple, Clara qui a utilisé (P3a) pour répondre à a') et b'), justifie ses réponses à c') et d') par une relation explicative :

> A : 3 impair est vrai. (3 impair = 4 impair) est vraie car d'après c)
> ¢ k[N, (k impair = k+1 pair).

Cette cohabitation entre vérifonctionnalité et lien explicatif peut être à l'origine de contradictions. En effet, un argument de même nature que celui que Clara utilise pour justifier d') lui ferait dire que a') est fausse, pourtant elle a dit que a') est vraie.

• L'absence de connaissances sur la vérifonctionnalité de l'implication met en valeur le lien explicatif. Cependant, si le lien explicatif paraît nécessaire pour dire qu'une implication est vraie, il ne paraît pas pour autant suffisant. En effet, b') est dite fausse alors que la propriété « Deux nombres consécutifs n'ont pas la même parité » est bien vérifiée. D'autre part, cette hypothèse paraît corroborée par la justification de Simon au deuxième tableau :

> Au principe précédent [la parité d'un nombre n'est pas celle de son suivant], j'ai ajouté la connaissance de la parité de 3. On aurait très bien pu ne pas le faire, les réponses auraient été : F,V,V,F.

Cette dernière phrase rejoint un phénomène marquant relevé dans le questionnaire puis dans le débat, qui peut être résumé par les questions suivantes : doit-on se servir des contenus sémantiques des propositions pour statuer sur la valeur de vérité de l'implication ? Qu'a-t-on le « droit » de savoir? Les étudiants sont indécis quant à leur "droit" à se servir de leurs connaissances sur la parité des nombres. Pour le deuxième tableau, ils proposent différentes solutions suivant les valeurs de vérités accordées aux propositions.

> Pour les questions a', b', c', d', *tout dépend de ce qui est supposé être vrai.* Si on suppose que les entiers 2k, k[N sont pairs (et sont les seuls) et les entiers s'écrivant 2k+1 sont impairs (et sont les seuls) [alors on a]. (Clara)

> tout dépend de la définition (Sarah, inscription dans la marge qui a été rayée)

> V : Finalement, pourquoi t'avais mis « on ne peut pas savoir » ?
> X : Parce que j'étais déstabilisé, si tu veux.
> V : Pourquoi ?
> X : Parce que je ne maîtrise pas ce genre de trucs. En fait, je ne sais pas dans quel monde me placer ! On a des infos mais on ne sait pas si on a le droit de les utiliser !
> V : Quoi comme genre d'infos ?
> X : Par exemple : 4 est pair ou 3 est impair. (Xavier, entretien à l'issue du questionnaire)

Il nous semble que c'est, ici, l'opposition entre l'utilisation des propriétés-en-acte liées à la vérifonctionnalité et l'utilisation de la propriété-en-acte de causalité qui apparaît. La vérité de l'implication dépend-elle de la vérité de la prémisse et de la conclusion ou bien ne dépend-elle que de la qualité du lien explicatif ? Les étudiants accordent suffisamment d'importance au lien explicatif pour être prêts à "oublier" ce qu'ils savent sur la parité des nombres et ne s'intéresser qu'à la relation sémantique entre prémisse et conclusion.

Remarquons que l'utilisation d'un lien explicatif au détriment des propriétés basées sur la vérifonctionnalité avait été remarquée dans un exemple de l'ouvrage (P) lors de notre analyse des manuels.

Des discussions auront lieu, de façon récurrente, au cours du débat sur le rôle des contenus mathématiques pour déterminer la valeur de vérité d'une implication. C'est donc une question importante liée à l'implication. De plus, on voit à la suite de ces questions apparaître une distinction « instinctive » entre la logique qui s'intéresserait plus aux valeurs de vérité des propositions dans l'implication et les mathématiques qui s'intéresseraient essentiellement au lien explicatif entre prémisse et conclusion.

Implication mathématique et logique naturelle (question 1-3)

À l'item 1-3, l'absence de lien explicatif entre les phrases et le contexte non mathématique semblent déconcerter les étudiants. Les propriétés-en-acte précédentes (P3a) et (P3b) liées à la vérifonctionnalité ne sont plus utilisées. Les deux binômes précédents ne se retrouvent pas mais sont remplacés par deux nouveaux binômes dont les réponses sont à rapprocher des réponses suivantes:
- il n'y a aucune implication entre ces phrases. (Clara et Sarah) (conforme à un variante de la réponse 2 attendue)
- « P2=P1 » est vraie (justification par un lien explicatif) et « P2=P3 » fausse. (Xavier et Simon) (conforme à une variante de la réponse 1 attendue avec des éléments de la réponse 2)

Les justifications à « P2=P1 » sont de type explicatif :

> en considérant que pour avoir la lumière du jour, il faut une étoile assez proche et manifestement, c'est le soleil qui nous envoie cette lumière. (Xavier)
>
> une étoile est un astre lumineux. Il fait jour, nous sommes donc éclairés par un astre lumineux. Le soleil sera celui-ci. (Simon)

Cependant, dans ce contexte, même ce lien explicatif ne paraît pas suffisant pour parler d'implication :

> l'implication qui me semble contenir le plus de vérité est P2 = P1. (Simon)

Le traitement de ces implications les amène à se poser les questions du statut de vérité des propositions et de la présence ou de l'absence de lien explicatif entre les phrases.

> C'est trop bizarre ! (…) C'est horrible ! Qu'est-ce qu'on suppose faux ou vrai ? (Clara)
>
> Ce que j'aimerais savoir, c'est si on considère que les phrases sont toutes vraies ou fausses… Est-ce qu'on peut considérer qu'elles sont toutes vraies et après regarder les implications ? (Simon)
>
> Je considère qu'au point de vue « langagier » aucune des propositions n'est reliée par une implication. Le soleil est une étoile n'implique pas qu'il fait jour ou qu'il fait nuit, car d'autres étoiles existent et n'influent pas sur le caractère jour et nuit (Clara)
>
> Je ne suis pas sûr d'avoir compris la question… Par exemple, on suppose que P1 est vraie et on essaie de démontrer avec P2 et P3 ? Moi c'est ce que j'ai compris. (Simon, échanges oraux à la fin du questionnaire)
> V : Pourquoi tu dis « il n'y a aucune implication » ?… Avec P1 ?
> S : Ben… il n'y en a pas. On ne peut pas dire P1 implique P2, c'est pas logique…
> V : Pourquoi ?
> S : Parce que ce n'est pas une conséquence ! ! ! (Sarah, échanges oraux à la fin du questionnaire)

Le contexte hors domaine mathématique est une difficulté de plus :

> Bizarre, parce que mélange du mot « implication » mathématique et propositions langagières (…) Très relatif. Pas trop de sens." (Clara)

Ce contexte non « habituel » avec, en particulier, la difficulté à discerner les phrases vraies des phrases fausses, peut être à l'origine de l'absence, dans les justifications, des propriétés-en-acte liées à la vérifonctionnalité utilisées précédemment.

Les implications les plus acceptables aux yeux des étudiants sont celles relatives à P2 et P3. Les liens entre ces deux phrases et leurs valeurs de vérité sont plus faciles à voir :

> nuit est le contraire de jour (…) (NonP3) => P2. (Simon)
>
> P2=>P3 et P3=>P2 sont fausses [car] P3 est la négation de P2. (Xavier)
>
> P2= P3 est impossible car on ne peut pas avoir jour et nuit simultanément. P2 = (Non P3) possible éventuellement. (Sarah, échanges oraux à la fin du questionnaire).

L'implication « P3=P2 est vraie » n'est pas apparue. C'est pourtant une réponse correcte associée à (P3a) et basée sur le fait que « il fait jour » est vraie. Cette absence est en accord avec l'hypothèse que nous avions faite dans l'analyse préalable. Rappelons que « A=>(NonA) » n'est vraie que dans le cas où A est fausse et que cette implication paraît en contradiction avec la logique naturelle.

Notons enfin une phrase :

> P1 implique P3 c'est doublement faux ! Parce qu'il ne fait pas nuit et aussi c'est pas parce que le soleil est une étoile qu'il fait nuit, ça pourrait très bien être une planète et il ferait nuit…. (Simon, échanges oraux à la fin du questionnaire)

Cette phrase est remarquable parce qu'elle montre combien compte le lien explicatif, mais aussi parce que c'est la seule fois, pour cette question, qu'un des étudiants décide de la véracité d'une implication à l'aide du statut de vérité des propositions. Remarquons, de plus, qu'il s'agit ici du statut de vérité de la conclusion qui n'avait même pas été utilisé à la question précédente.

Prémisse fausse (question 7)

Les réponses à la question 7 paraissent assez proches des réponses à la question 1-2.

- pas d'utilisation de l'outil « contraposée » pour cette question.
- utilisation de la propriété en acte « Si P est fausse alors P= Q est vraie » (P3a) (réponse conforme à la réponse 1 attendue) (Xavier).

> Je suis d'accord avec l'auteur car le fait que « 5 est un nombre pair » est faux. Il implique donc toute proposition. (Xavier)

- utilisation d'un lien explicatif (P2) (réponse conforme à la réponse 2 attendue) (Sarah).

> [...] si k est un nombre pair, alors k=2p.
> k-2=2p-2=2(p-1) est un nombre pair.
> Donc si on considère que 5 est pair alors 5-2 est pair.

- production de deux réponses : l'une utilisant une propriété liée au statut de vérité de la prémisse (P3) et l'autre utilisant un lien explicatif (P2) (Clara et Simon).

> 1) La proposition « 5 est un nombre pair » est fausse [...] Or, une proposition fausse implique une proposition fausse ou une proposition vraie ou une proposition fausse. [...]
> Donc « 5 est un nombre pair » => « 3 est pair » est vraie.
> 2) Si on suppose vraies les propositions suivantes
> P1 : « $\forall k \in N$, k pair = (k+2n) pair et tel que $(k+2n) \in N$ ».
> P2 : « 5 est un nombre pair ».
> on a : P2=>(« 3 est pair ») (Clara, question 7)
>
> La proposition est vraie avec les « axiomes »
> • 5 est le suivant du suivant de 3
> • Le suivant du suivant d'un nombre a la même parité que celui-ci.
> Si l'on sait en plus la parité de 3 dans l'arithmétique classique, la proposition devient fausse."(Simon, justification de la question 7).

Dans ces réponses les conceptions cohabitent et ne paraissent pas se contredire : « tout dépend de ce qu'on suppose ».

En conclusion, voici quelques résultats à retenir de l'analyse de ce questionnaire. *La contraposée ne joue jamais le rôle d'outil* pour décider de la véracité d'une implication.

Les deux propriétés-en-acte liées à la prémisse fausse (P3a et P3b) sont également présentes. En revanche, les propriétés-en-acte liées à la vérité de la conclusion apparaissent peu. *La vérifonctionnalité de l'implication n'est pas du tout reconnue.*

La conception de causalité, très présente, cohabite avec les propriétés-en-acte liées à la prémisse fausse. Ce sont parfois ces dernières qui permettent de décider de la véracité d'une implication, mais *la présence du lien explicatif paraît nécessaire pour que l'on puisse parler d'implication*.

4. Conclusion

Dans cette conclusion, nous donnerons, tout d'abord, un aperçu des autres résultats de notre mémoire liés à des questions que nous n'avons pas étudiées ici. Ces résultats prolongent et complètent ceux qui ressortent de cet article.

• *Le lien entre l'implication et les ensembles est peu présent et paraît superficiel.* On peut, en fait, ajouter que le rapport personnel de ces étudiants au lien formel entre représentation ensembliste et implication est idoine à l'objet « lien » de l'institution mathématique que nous avons vu au travers des manuels.

En effet, le lien formel entre A1B et l'implication A=>B (où A (resp. B) est l'ensemble des objets qui vérifient la propriété A (resp.B)) est connu. Pourtant, les ensembles ne sont jamais des outils pour répondre aux questions.

Notons, de plus, que l'absence de quantification universelle dans l'implication précédente peut-être source d'erreur, notamment dans l'écriture de la négation de l'implication.

• Nos questions sur les conditions suffisantes et nécessaires ont été bien réussies dans l'ensemble. Cependant, il apparaît qu'*une conception causale-temporelle*[20] *de l'implication empêche de différencier la condition nécessaire de la condition suffisante***.** (Sarah)

Ajoutons que l'expression « seulement si » n'est pas du tout disponible[21], bien qu'elle soit comprise par trois étudiants.

• L'usage de l'implication dans les démonstrations[22] ne va pas forcément de soi, comme par exemple, pour traduire une implication à deux entrées ou pour traduire l'expression « seulement si ». *Les contenus mathématiques ne semblent pas être toujours suffisants pour permettre d'écrire les implications « dans le bon sens ».*

• *Les implications paraissent très largement perçues comme implicitement universellement quantifiées*[23]. Cependant, cet implicite n'est pas conscient et empêche de comprendre d'autres réponses dues à une autre interprétation de l'implication. Cette habitude peut aussi amener à produire des réponses non opérationnelles dans certains cas.

• *La négation de l'implication n'est pas familière*, à telle point qu'elle n'est pas reconnue comme telle par les étudiants qui la produisent. Les erreurs et la "non reconnaissance" sont dues à l'attente d'une autre implication pour formuler la négation de P=>Q.

Nous voulons, dans un deuxième temps, faire quelques remarques sur ces résultats.

Dans les manuels, comme dans les réponses au questionnaire, le point de vue ensembliste sur l'implication est réduit à son minimum. Pourtant, ce point de vue, contrairement au point de vue déductif, permet de problématiser la vérité de la prémisse. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse qu'il permet de mieux *différencier l'implication de l'équivalence.*

D'autre part, le point de vue ensembliste, comme le point de vue de la logique, permet une formulation plus facile de la négation de l'implication.

Enfin, parler en termes d'ensembles permet de travailler sur une implication dont les quantificateurs apparaissent explicitement.

La *conception causale de l'implication est largement prédominante* dans les réponses des étudiants et la *vérifonctionnalité de l'implication ne leur est pas connue* : il n'y a pas d'implication entre deux faits qui n'ont « rien à voir ». Il est vrai que, dans le raisonnement déductif, on ne s'intéresse qu'à des implications qui montrent un lien, on pourrait donc admettre cette conception causale comme légitime.

Cependant, cette conception peut amener à confondre condition nécessaire et condition suffisante notamment lorsqu'elle s'accompagne d'une conception temporelle

---

[20]Une conception temporelle de l'implication amène à dire que dans A=B, la condition A doit être remplie avant la condition B. Cette conception est très liée à la conception causale de l'implication.

[21]Nous entendons par là qu'elle n'est pas citée par les étudiants parmi les expressions langagières associées à l'implication.

[22]Une des questions de notre questionnaire consistait en la traduction, à l'aide du symbole =, et la remise en ordre d'une démonstration écrite en langage courant.

[23]Cet aspect-là est étudié dans l'analyse de la question 1-2 (Deloustal,1999).

de l'implication. En effet, si A est perçue comme la cause de B, comment dire que B est une condition nécessaire pour A ?

Enfin, nous présentons quelques pistes de recherche suggérées par nos résultats et nos observations. Elles sont actuellement l'objet de nos recherches dans le cadre d'une thèse en didactique des mathématiques.

• Y a-t-il une corrélation entre la non prise en compte de « A faux » dans « A implique B » et la *confusion implication / équivalence* ?

• *Quel rôles les contenus sémantiques prennent-ils dans la validation d'une implication ?*

Les questions « Que suppose-t-on qu'on sait ? », « Qu'a-t-on le droit de savoir ? » ont été très présentes lors des questionnaires et au cours du débat.

• *Quelles sont les conceptions sur la notions de « propriété » ?*

Nous avons vu que le point de vue ensembliste, bien que formellement connu, n'était pas utilisé, nous nous demandons si cela n'est pas dû à une certaine conception de la notion de propriété. En effet, si le mot "propriété" est rattaché à l'ensemble des objets qui ont cette propriété, le point de vue ensembliste devrait être facilement utilisable. En revanche, si une propriété est considérée comme la qualité d'un objet, ce n'est plus le cas.

• Vérification de l'hypothèse suivante : *les situations scolaires* dans lesquelles l'implication est utilisée dans un schéma déductif et où les théorèmes à démontrer, de la forme A=>B (ou même plus souvent A≠>B), sont tels que A et B sont connus sans ambiguïté *ne permettent pas de problématiser l'implication.* Ce n'est que dans le cas de situations-problèmes dans lesquelles les propriétés à démontrer ne sont pas connues à l'avance que l'implication peut prendre son sens.

Bibliographie.

ARTAUD M. (1997) *La problématique écologique - un style d'approche du didactique*, in Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques, Houlgate, 19-27 août 97.

BROUSSEAU G. (1986) *Fondements et Méthodes de la didactique des mathématiques*, in Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 7.2 (surtout 33-76 et 89-115), éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1998) *Le concept de rapport au savoir*, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université J. Fourier, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1992) *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, in Recherches en didactique des mathématiques 12(1) 73 112, éd. La Pensée sauvage, Grenoble.

DELOUSTAL V. (1999) *Le concept d'implication : l'objet mathématique, quelques aspects dans les manuels, conceptions de futurs enseignants*, mémoire de DEA, université Joseph Fourier, Grenoble.

DURAND-GUERRIER V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*., Thèse, Université Claude Bernard, Lyon.

DURAND-GUERRIER V. (1999) *L'élève, le professeur et le labyrinthe*, Petit x n°50.

DURAND-GUERRIER V. (2000) *Négation, conditionnels et quantification dans la classe de mathématiques*, in Actes du XXVIème colloque de la COPIRELEM, Limoges-mai 1999 (à paraître).

Duval R. (1988) *Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence,* in Annales de didactiques et de sciences cognitives Vl 1, 7-23, ULP, IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (1993) *Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?*, Petit x n°31.

MENSOURI D. (1994) *Essai de délimitation en termes de problématiques des effets de contrat et de transposition : le cas des relations entre droites et équations dans les classes de seconde et première,* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

ROLLAND J. (1999) *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication,* Thèse, Université Joseph Fourier, IMAG, Grenoble.

VERGNAUD G. (1990) *La théorie des champs conceptuels*, in Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 10/2.3, éd. La Pensée sauvage, Grenoble.