Université Joseph Fourier - Grenoble I

Thèse pour obtenir le grade de docteur de l'Université Joseph Fourier en mathématiques-informatique (spécialité didactique des mathématiques)

présentée et soutenue publiquement par

Virginie Deloustal-Jorrand

L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique

Étude sous trois points de vue :
raisonnement déductif, logique formelle,
et théorie des ensembles.

Construction d'une situation didactique
qui problématise l'implication.

Soutenue le 20 décembre 2004

Jury : Nicolas Balacheff (président du jury)
Viviane Durand-Guerrier (membre du jury)
Denise Grenier (co-directrice)
Alain Mercier (rapporteur)
Charles Payan (co-directeur)
Marc Rogalski (rapporteur)

Thèse préparée au sein de l'équipe CNAM du laboratoire Leibniz

Je remercie M. Nicolas Balacheff, directeur du laboratoire Leibniz, d'avoir accepté de présider le jury de soutenance de cette thèse.

Je remercie M. Alain Mercier et M. Marc Rogalski d'avoir bien voulu être les rapporteurs de cette thèse, Madame Viviane Durand-Guerrier d'avoir accepté d'être membre du jury. Qu'ils soient tous trois remerciés pour l'intérêt qu'ils ont pris à mon travail et la gentillesse avec laquelle ils m'ont présenté leurs points de vue pendant toutes ces années.

Je remercie Madame Denise Grenier et Monsieur Charles Payan qui m'ont encadrée pour mon mémoire de DEA et ma thèse. Qu'ils soient remerciés pour leurs compétences, leur disponibilité, leurs encouragements, leur enthousiasme, leur gentillesse et leur complémentarité scientifique, même si mener à terme une thèse passe aussi par des moments difficiles…

Je remercie Madame Madeleine Eberhard et Monsieur Hamid Chaachoua pour m'avoir laissée entrer dans leurs classes de PLC2 de l'IUFM de Grenoble.

Je remercie tous les membres de l'équipe CNAM du laboratoire Leibniz, et particulièrement Cécile et Sylvain, pour leur aide pendant toutes ces années et pour la convivialité particulière à cette équipe.

Enfin, je remercie de tout cœur ma famille, et en particulier Damien, pour son soutien tout au long de ma thèse.

Table des matières

Introduction

Notre étude est motivée par la place essentielle du concept d'implication à la fois dans la vie de tous les jours et dans l'activité scientifique. Il semblerait normal que son apprentissage ait une place centrale dans l'enseignement.

D'une part, l'implication de la logique *naturelle* est omniprésente dans notre vie quotidienne et nous est nécessaire. Nous l'utilisons, par exemple, dès que nous employons les expressions *Si … alors…* ou *il suffit que…*, ou encore *il est nécessaire que …* Mais, alors que son utilisation nous paraît naturelle, une définition de l'implication ne va pas de soi. En effet, toute définition est en fait la donnée d'une équivalence, or l'équivalence n'est rien d'autre que la conjonction de deux implications. Définir l'implication apparaît ainsi d'emblée comme un paradoxe.

D'autre part, l'implication est au centre de toute activité mathématique, elle est constitutive de la substance même des preuves et des démonstrations, et au-delà, essentielle dans tout raisonnement scientifique. Pourtant, elle n'est presque pas enseignée en tant qu'objet mathématique, sa place dans l'enseignement est vague et elle apparaît plutôt comme un outil *paramathématique* au sens de Y. Chevallard :

> *Les notions paramathématiques sont des notions outils de l'activité mathématique ; elles ne font pas l'objet d'un enseignement, ce sont des savoirs auxiliaires nécessaires à l'enseignement (et à l'apprentissage) des objets mathématiques proprement dits. Ils doivent être « appris » (ou plutôt « connus ») mais ils ne sont pas enseignés.*
> *[Chevallard Y., 1985, p.50]*

Enfin, la logique mathématique apparaît comme une modélisation de la logique naturelle. Cette proximité des deux objets amène souvent à les confondre, comme dans bon nombre de manuels de seconde. Ainsi, la manière dont l'implication *vit* dans l'enseignement ne permet pas toujours de la distinguer de l'*implication naturelle*. Il en résulte que l'implication apparaît comme un objet *transparent* et facile à manipuler alors que, paradoxalement, de nombreux étudiants manifestent des difficultés relativement à l'implication jusqu'en maîtrise et au-delà, notamment en ce qui concerne les conditions nécessaires et les conditions suffisantes.

C'est pourquoi, nous affirmons que cette identification de l'objet mathématique à l'implication de la logique naturelle est insuffisante pour une « bonne » appréhension et une « bonne » manipulation de ce dernier. Illustrons cela par un exemple emprunté à J. et M. Rogalski.

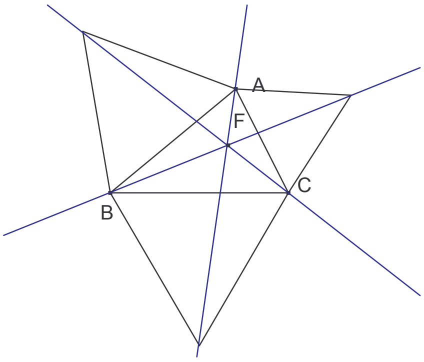
> *Les bonbons de la maîtresse.*
> *Dans une école primaire, la maîtresse donne un jour un problème aux élèves, et leur dit : "cherchez ce problème chez vous ; demain, si quelqu'un a su le résoudre, je vous donnerai des bonbons".*
> *Le lendemain, aucun élève n'a su faire le problème. La maîtresse sort un paquet de bonbons et les distribue aux enfants. Ceux-ci protestent : "Ce n'est pas juste, on n'a pas su faire le problème, on n'a pas droit aux bonbons !". Goguenarde, la maîtresse leur répond qu'elle a parfaitement respecté le contrat…*
> *[Rogalski J., Rogalski M., 2004]*

Nous expliquons cette divergence entre les élèves et la maîtresse par la distance entre l'implication naturelle et l'implication mathématique. Ceci sera développé au chapitre 1, mais nous pouvons déjà dire que les élèves ont interprété la condition suffisante énoncée par la maîtresse comme une équivalence. L'implication *naturelle*, en raison de ces différentes interprétations, est donc insuffisante pour définir l'implication mathématique.

D'autre part, nous avons mené notre recherche au sein de l'équipe *Combinatoire Naïve et Apprentissages Mathématiques* du laboratoire *Leibniz* de Grenoble, et ceci a engagé notre problématique dans une direction particulière. En effet, une des préoccupations principales de cette équipe, composée de chercheurs en didactique des mathématiques et de chercheurs en mathématiques discrètes, est l'étude de savoirs « transversaux » tels que la modélisation, la preuve ou la définition. Différentes recherches menées dans cette équipe, notamment [Grenier D., Payan C., 1998 & 2003] et [Rolland J., 1999], nous ont amenée à nous poser la question de l'implication dans des situations mettant en jeu des objets de mathématiques discrètes. Il est apparu que, pour certains de ces objets, le cadre ensembliste semblait à la fois nécessaire et « naturel » lors d'une mise en œuvre de l'implication. Nous le montrerons dans le premier chapitre.

Or avoir un *point de vue ensembliste*, est nécessaire pour maîtriser l'implication mais aussi la preuve en général, c'est une hypothèse que nous développerons dans la suite. Cependant, le point de vue ensembliste dans la démonstration semble absent de l'enseignement, c'est ce que nous voulons introduire par l'exemple suivant sur le point de Fermat d'un triangle. Voici les définitions données par le dictionnaire des mathématiques.

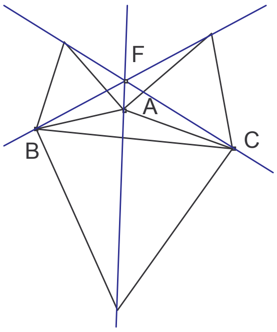
> *Point de Fermat d'un triangle ABC : Soient ABC', ACB' et BCA' les trois triangles équilatéraux construits extérieurement au triangle ABC. Les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en un point F appelé point de Fermat.*



Problème de Fermat : Étant donné un triangle ABC, trouver un point M du plan rendant minimum la longueur AM + BM + CM. Ce point admet pour solution le point de Fermat.
[Bouvier A., George M., Le Lionnais F, 1996]

On retrouve parfois cette définition-là en exercice dans les manuels du secondaire où il est demandé de montrer que le point de Fermat minimise bien la distance MA + MB + MC.

Cependant, cette propriété n'est vraie que dans le cas où F est intérieur au triangle, c'est-à-dire lorsque le triangle n'est pas « trop aplati ». En effet, sur le dessin ci-dessous, le point F qui vérifie la définition du point de Fermat ne minimise pas la longueur !



Nous faisons l'hypothèse que l'absence du point de vue ensembliste dans la démonstration est la cause de cette erreur courante. Il ne suffit pas de bâtir la démonstration sur un triangle qui semble « quelconque » pour prendre en compte tous les cas ! Cette remarque nous amènera à distinguer au chapitre 6 les dessins, les figures et ce que nous appellerons les figures ensemblistes. L'utilisation du cadre ensembliste dans la démonstration sera abordée dès le premier chapitre. Ces différentes réflexions nous ont conduite à nous poser les questions suivantes :

Quel est l'objet mathématique « implication » ?
Quelle est sa vie dans l'enseignement des mathématiques ?
Comment construire une situation qui problématise l'implication ?

En réponse à la première question, nous avons mené, au chapitre 1, une analyse épistémologique du concept mathématique d'implication. Après avoir montré ses analogies et ses différences avec l'objet naturel, nous l'avons étudié sous trois points de vue : le point de vue de la logique formelle, le point de vue ensembliste et le point de vue du raisonnement déductif.

En réponse à la deuxième question, nous avons étudié, dans le chapitre 2, la *vie* de l'implication, relativement à ces trois points de vue, dans quelques manuels du collège à l'université.

Dans le chapitre 3, nous présentons quelques travaux didactiques concernant l'implication et nous présentons les résultats de nos premières recherches. Nous détaillons notamment ce que nous appelons une *conception causale-temporelle* de l'implication.

À la suite de ces résultats, notre hypothèse de travail était la suivante : l'absence de liens entre ces trois points de vue est à l'origine de nombreuses difficultés et erreurs tant dans l'appréhension que dans l'utilisation de l'implication. C'est ainsi que nous avons énoncé notre thèse :

> **Il est nécessaire de connaître et d'établir les liens entre les trois cadres (logique formelle, ensembliste et raisonnement déductif) pour une bonne appréhension et une bonne utilisation de l'implication.**
>
> **Et ce jeu de cadre est aussi suffisant, si on arrive à le mettre en œuvre.**

Ces questions seront développées dans notre problématique au chapitre 5.

Pour apporter des éléments de réponse à cette thèse nous avons construit une ingénierie didactique qui permette de problématiser l'implication par un *jeu* sur ces trois cadres, en montrant, en particulier, la pertinence du cadre ensembliste pour travailler l'implication. C'est l'étude de cette ingénierie, analyse a priori et résultats, que nous présentons dans la deuxième partie.

Enfin, nous conclurons par une synthèse des résultats et quelques perspectives de recherche.