

Université Joseph Fourier - Grenoble I

**Thèse pour obtenir le grade de docteur de l'Université
Joseph Fourier en mathématiques-informatique
(spécialité didactique des mathématiques)**

présentée et soutenue publiquement par

Virginie Deloustal-Jorrand

**L'implication mathématique :
étude épistémologique et didactique**

Étude sous trois points de vue :
raisonnement déductif, logique formelle,
et théorie des ensembles.

Construction d'une situation didactique
qui problématise l'implication.

Soutenue le 20 décembre 2004

Jury : Nicolas Balacheff (président du jury)
Viviane Durand-Guerrier (membre du jury)
Denise Grenier (co-directrice)
Alain Mercier (rapporteur)
Charles Payan (co-directeur)
Marc Rogalski (rapporteur)

Je remercie M. Nicolas Balacheff, directeur du laboratoire Leibniz, d'avoir accepté de présider le jury de soutenance de cette thèse.

Je remercie M. Alain Mercier et M. Marc Rogalski d'avoir bien voulu être les rapporteurs de cette thèse, Madame Viviane Durand-Guerrier d'avoir accepté d'être membre du jury. Qu'ils soient tous trois remerciés pour l'intérêt qu'ils ont pris à mon travail et la gentillesse avec laquelle ils m'ont présenté leurs points de vue pendant toutes ces années.

Je remercie Madame Denise Grenier et Monsieur Charles Payan qui m'ont encadrée pour mon mémoire de DEA et ma thèse. Qu'ils soient remerciés pour leurs compétences, leur disponibilité, leurs encouragements, leur enthousiasme, leur gentillesse et leur complémentarité scientifique, même si mener à terme une thèse passe aussi par des moments difficiles...

Je remercie Madame Madeleine Eberhard et Monsieur Hamid Chaachoua pour m'avoir laissée entrer dans leurs classes de PLC2 de l'IUFM de Grenoble.

Je remercie tous les membres de l'équipe CNAM du laboratoire Leibniz, et particulièrement Cécile et Sylvain, pour leur aide pendant toutes ces années et pour la convivialité particulière à cette équipe.

Enfin, je remercie de tout cœur ma famille, et en particulier Damien, pour son soutien tout au long de ma thèse.

Table des matières

<i>Introduction</i>	9
Chapitre 1 Analyse épistémologique et didactique de l'implication, objet naturel et objet mathématique	13
1. Objet naturel.....	13
1.1. Confusion avec <i>seulement si</i> ou avec <i>si et seulement si</i>	14
1.2. Nécessité d'ordre moral.....	19
1.3. Prémisse fausse.....	20
1.4. Causalité et temporalité	22
1.5. Utilisation en situation : causalité, contraposée, absurde... ..	23
2. Objet mathématique.....	24
2.1. Objet mathématique : modélisation de l'objet naturel.....	24
2.2. Trois cadres pour l'implication.....	24
3. Le cadre de la logique formelle.....	26
3.1. Définitions.....	26
3.2. Construction de l'implication logique : conformité et contradictions avec l'implication naturelle.....	29
3.3. Autre écriture de l'implication logique	32
3.4. Condition nécessaire, condition suffisante, équivalence	32
3.5. Propriété de l'implication logique	33
3.6. Utilisation de l'implication logique : interprétation universellement quantifiée implicite dans l'enseignement	34
3.7. Négation de l'implication dans le cadre logique : deux types de <i>faux</i>	35
4. Le cadre ensembliste	37
4.1. Les propriétés d'objets dans le cadre ensembliste.....	37
4.2. Deux exemples pour illustrer le cadre ensembliste	38
4.3. Mise en relation avec les connecteurs logiques : complémentaire, union, intersection	40
4.4. L'implication dans le cadre ensembliste.....	41
4.5. Condition nécessaire, condition suffisante, équivalence	44
4.6. Utilisation de l'implication du cadre ensembliste	44
4.7. Négation de l'implication dans le cadre ensembliste.....	45
5. Le cadre du raisonnement déductif.....	47
5.1. Présentation.....	47
5.2. Deux enjeux de vérité différents	48
5.3. La prédominance du cas où la prémisse est vraie.....	50
5.4. Présence d'un lien causal entre prémisse et conclusion.....	51
6. Relations entre les différents cadres.....	53
6.1. Passage d'un cadre à l'autre	53
6.2. Quantificateurs et contre-exemples.....	54
6.3. Apports des différents cadres pour le concept d'implication	55
7. Différents types de tâches problématisant l'implication	56
7.1. $A \Rightarrow B$ où A et B sont connus	56
7.2. Dans H , $A \Rightarrow B$ où A et B sont connus	56
7.3. Dans H , $(A ?) \Rightarrow B$	57
7.4. Dans H , $(A_1 \text{ ou } A_2) \Rightarrow B$	57
7.5. Dans H , $A ? B$	58

Chapitre 2 Étude de la transposition de l'implication dans des manuels, du collège à l'université.....	59
1. Remarque préliminaire.....	61
2. Quel habitat pour l'objet implication ?.....	62
2.1. Dans un chapitre de logique uniquement.....	62
2.2. Dans un chapitre de théorie des ensembles uniquement.....	63
2.3. Dans un chapitre ou une fiche sur le raisonnement uniquement.....	63
2.4. À l'intérieur d'un cours.....	64
3. Quelle(s) définition(s) pour l'objet implication ?.....	64
3.1. Définitions réduites à une description.....	64
3.2. Définitions dans le cadre de la logique formelle.....	68
3.3. Définition dans le cadre ensembliste.....	70
3.4. Définitions dans le registre du raisonnement déductif.....	71
3.5. Les exemples illustrant la définition dans les manuels de DEUG.....	74
4. Dans quel(s) objectif(s) l'objet implication est-il introduit ?.....	75
4.1. Outil à la théorie des ensembles.....	76
4.2. Outil au raisonnement déductif.....	79
5. Quelle niche pour l'objet implication ?.....	84
5.1. Dans le cours.....	84
5.2. Cadre logique.....	85
5.3. Cadre ensembliste.....	85
5.4. Cadre démonstratif, raisonnement.....	86
6. Quels ostensifs sont utilisés pour l'objet implication ?.....	86
6.1. L'équivalence.....	86
6.2. Si...alors.....	87
6.3. Le symbole \Rightarrow associé à des expressions langagières.....	87
6.4. Divers symboles logiques associés à des expressions langagières.....	88
7. Quelques conclusions.....	92
Chapitre 3 Travaux didactiques sur l'implication.....	95
1. Regard sur quelques travaux didactiques.....	96
1.1. V. Durand-Guerrier : <i>les énoncés contingents sont nécessaires</i>	96
1.2. J. & M. Rogalski : <i>des « profils » d'étudiants par rapport à l'implication</i>	98
1.3. J. Rolland : <i>modélisation / condition nécessaire et condition suffisante</i>	102
1.4. M. Legrand : <i>maximum d'information en logique naturelle</i>	104
1.5. R. Duval : <i>raisonnement déductif</i>	106
1.6. N. Balacheff : <i>différents types de preuves</i>	107
2. Synthèse de nos propres travaux antérieurs.....	108
2.1. Le dispositif expérimental.....	109
2.2. Analyse préalable du questionnaire.....	109
2.3. Quelques résultats :.....	114
2.4. Le débat.....	120
2.5. Quelques conclusions.....	127
2.6. Une deuxième expérimentation.....	127
Chapitre 4 Les questions de notre recherche, méthodologie et cadre théorique	133
1. Questions de la recherche et hypothèses de recherche.....	133
2. Cadre théorique et méthodologie.....	135

3. Choix généraux pour notre ingénierie	136
3.1. Choix du public	136
3.2. Variables globales pour notre ingénierie didactique.....	137
3.3. Contraintes comme choix de variables pour notre ingénierie	139
4. Quelques critères d'identification de l'utilisation des différents cadres dans les productions	141
Chapitre 5 Présentation de notre ingénierie.....	143
1. Le public.....	143
2. L'organisation matérielle.....	144
3. L'organisation didactique.....	144
4. Les énoncés des problèmes.....	145
4.1. Situation Géométrie 1.....	145
4.2. Situation Géométrie 2.....	146
4.3. Situation Polyminos 1.....	146
4.4. Situation Polyminos 2.....	147
Chapitre 6 Quelques éléments de réflexion sur les objets géométriques et leurs représentations	149
1. Les quadrilatères	149
2. Dessin, figure, figure ensembliste.....	151
3. Trapèzes et parallélogrammes.....	157
Chapitre 7 Analyse a priori des situations	165
1. Situation <i>Géométrie 1</i>	165
1.1. Type de tâche et questionnement	166
1.2. Conditions suffisantes, Stratégie 1.....	168
1.3. Configurations connues, Stratégie 2.....	170
1.4. Cadre ensembliste, Stratégie 3 : H puis Pi.....	173
1.5. Cadre ensembliste, Stratégie 4 : P1 puis H.....	197
1.6. Figures scolaires, Stratégie 5.....	202
1.7. Quelques remarques sur les stratégies détaillées.....	216
1.8. Les choix didactiques pour la situation <i>Géométrie 1</i>	219
2. Situation <i>Géométrie 2</i>	221
2.1. Type de tâche et questionnement	222
2.2. Validité de la phrase de Y, Stratégie 1 : Cadre logique	223
2.3. Validité de la phrase de Y, Stratégie 2 : Contre-exemple	223
2.4. Validité de la phrase de Y, Stratégie 3 : Contenus sémantiques	223
2.5. Réponse à toutes les questions, Stratégie 4 : Cadre ensembliste	224
2.6. Réponse aux autres questions, Stratégie 5 : Convexes.....	232
2.7. Les choix didactiques pour la situation <i>Géométrie 2</i>	233
3. Situation <i>Polyminos 1</i>	235
3.1. Type de tâche et questionnement	236
3.2. Démonstration dans le cadre déductif.....	237
3.3. Stratégie par essais, conjectures et contre-exemples	238
3.4. Les choix didactiques pour la situation <i>Polyminos 1</i>	240
4. Situation <i>Polyminos 2</i>	241
4.1. Type de tâche et questionnement	241

4.2. Sous-tâche de la question 1.....	242
4.3. Sous-tâche de la question 2.....	243
4.4. Les choix didactiques pour la situation <i>Polyminos 2</i>	246
5. Intérêt de la confrontation des situations <i>Géométrie</i> et <i>Polyminos</i>	248
5.1. Analogies entre les situations <i>Géométrie</i> et <i>Polyminos</i>	248
5.2. Différences entre les situations <i>Géométrie</i> et <i>Polyminos</i>	249
Chapitre 8 Analyse didactique de notre expérimentation	
par rapport à nos questions de recherche.....	253
1. Situation <i>Géométrie 1</i>	253
1.1. Problématisation de l'implication.....	254
1.2. Le cadre ensembliste.....	262
1.3. Le cadre logique : le connecteur OU.....	270
1.4. Leurs avis en tant que professeurs.....	271
1.5. Quelques conclusions sur l'analyse des productions de la situation <i>Géométrie 1</i>	273
2. Situation <i>Géométrie 2</i>	274
2.1. L'implication.....	274
2.2. Le cadre logique.....	276
2.3. Le cadre ensembliste.....	277
2.4. Recherche d'une réponse aux autres questions.....	279
2.5. Cohabitation des trois cadres.....	280
2.6. Quelques conclusions sur l'analyse des productions de la situation <i>Géométrie 2</i>	281
3. Situation <i>Polyminos 1</i>	281
3.1. Problématiser l'implication par la distinction CN et CS.....	281
3.2. Problématiser le cadre ensembliste par les objets polyminos.....	287
3.3. Quelques conclusions sur l'analyse des productions de la situation <i>Polyminos 1</i>	293
4. Situation <i>Polyminos 2</i>	294
4.1. Validité / Recevabilité.....	294
4.2. Preuve 2.....	298
4.3. Outil coloration.....	300
4.4. Quelques conclusions sur l'analyse des productions de la situation <i>Polyminos 2</i>	300
5. Quelques résultats de notre expérimentation.....	301
5.1. Synthèse comparative des situations <i>Géométrie</i> et <i>Polyminos</i>	301
5.2. Évolution au cours des quatre situations.....	305
5.3. Des améliorations à envisager sur nos situations.....	306
Conclusion Résultats et perspectives de recherche.....	307
1. Analyse épistémologique et didactique de l'implication.....	307
2. Analyse de manuels.....	308
3. Étude des objets géométriques.....	309
4. Nos expérimentations.....	309
5. À propos de notre thèse.....	311
6. Perspectives de recherche.....	311
Références bibliographiques.....	313

Introduction

Notre étude est motivée par la place essentielle du concept d'implication à la fois dans la vie de tous les jours et dans l'activité scientifique. Il semblerait normal que son apprentissage ait une place centrale dans l'enseignement.

D'une part, l'implication de la logique *naturelle* est omniprésente dans notre vie quotidienne et nous est nécessaire. Nous l'utilisons, par exemple, dès que nous employons les expressions *Si ... alors...* ou *il suffit que...*, ou encore *il est nécessaire que ...*. Mais, alors que son utilisation nous paraît naturelle, une définition de l'implication ne va pas de soi. En effet, toute définition est en fait la donnée d'une équivalence, or l'équivalence n'est rien d'autre que la conjonction de deux implications. Définir l'implication apparaît ainsi d'emblée comme un paradoxe.

D'autre part, l'implication est au centre de toute activité mathématique, elle est constitutive de la substance même des preuves et des démonstrations, et au-delà, essentielle dans tout raisonnement scientifique. Pourtant, elle n'est presque pas enseignée en tant qu'objet mathématique, sa place dans l'enseignement est vague et elle apparaît plutôt comme un outil *paramathématique* au sens de Y. Chevallard :

Les notions paramathématiques sont des notions outils de l'activité mathématique ; elles ne font pas l'objet d'un enseignement, ce sont des savoirs auxiliaires nécessaires à l'enseignement (et à l'apprentissage) des objets mathématiques proprement dits. Ils doivent être « appris » (ou plutôt « connus ») mais ils ne sont pas enseignés.

[Chevallard Y., 1985, p.50]

Enfin, la logique mathématique apparaît comme une modélisation de la logique naturelle. Cette proximité des deux objets amène souvent à les confondre, comme dans bon nombre de manuels

de seconde. Ainsi, la manière dont l'implication *vit* dans l'enseignement ne permet pas toujours de la distinguer de l'*implication naturelle*. Il en résulte que l'implication apparaît comme un objet *transparent* et facile à manipuler alors que, paradoxalement, de nombreux étudiants manifestent des difficultés relativement à l'implication jusqu'en maîtrise et au-delà, notamment en ce qui concerne les conditions nécessaires et les conditions suffisantes.

C'est pourquoi, nous affirmons que cette identification de l'objet mathématique à l'implication de la logique naturelle est insuffisante pour une « bonne » appréhension et une « bonne » manipulation de ce dernier. Illustrons cela par un exemple emprunté à J. et M. Rogalski.

Les bonbons de la maîtresse.

Dans une école primaire, la maîtresse donne un jour un problème aux élèves, et leur dit : "cherchez ce problème chez vous ; demain, si quelqu'un a su le résoudre, je vous donnerai des bonbons".

Le lendemain, aucun élève n'a su faire le problème. La maîtresse sort un paquet de bonbons et les distribue aux enfants. Ceux-ci protestent : "Ce n'est pas juste, on n'a pas su faire le problème, on n'a pas droit aux bonbons !". Goguenarde, la maîtresse leur répond qu'elle a parfaitement respecté le contrat...

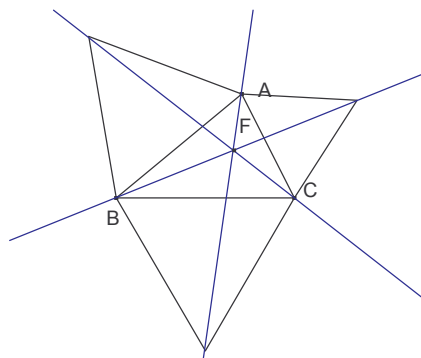
[Rogalski J., Rogalski M., 2004]

Nous expliquons cette divergence entre les élèves et la maîtresse par la distance entre l'implication naturelle et l'implication mathématique. Ceci sera développé au chapitre 1, mais nous pouvons déjà dire que les élèves ont interprété la condition suffisante énoncée par la maîtresse comme une équivalence. L'implication *naturelle*, en raison de ces différentes interprétations, est donc insuffisante pour définir l'implication mathématique.

D'autre part, nous avons mené notre recherche au sein de l'équipe *Combinatoire Naïve et Apprentissages Mathématiques* du laboratoire *Leibniz* de Grenoble, et ceci a engagé notre problématique dans une direction particulière. En effet, une des préoccupations principales de cette équipe, composée de chercheurs en didactique des mathématiques et de chercheurs en mathématiques discrètes, est l'étude de savoirs « transversaux » tels que la modélisation, la preuve ou la définition. Différentes recherches menées dans cette équipe, notamment [Grenier D., Payan C., 1998 & 2003] et [Rolland J., 1999], nous ont amenée à nous poser la question de l'implication dans des situations mettant en jeu des objets de mathématiques discrètes. Il est apparu que, pour certains de ces objets, le cadre ensembliste semblait à la fois nécessaire et « naturel » lors d'une mise en œuvre de l'implication. Nous le montrerons dans le premier chapitre.

Or avoir un *point de vue ensembliste*, est nécessaire pour maîtriser l'implication mais aussi la preuve en général, c'est une hypothèse que nous développerons dans la suite. Cependant, le point de vue ensembliste dans la démonstration semble absent de l'enseignement, c'est ce que nous voulons introduire par l'exemple suivant sur le point de Fermat d'un triangle. Voici les définitions données par le dictionnaire des mathématiques.

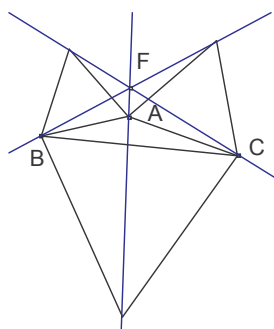
Point de Fermat d'un triangle ABC : Soient ABC' , ACB' et BCA' les trois triangles équilatéraux construits extérieurement au triangle ABC. Les droites AA' , BB' et CC' sont concourantes en un point F appelé point de Fermat.



*Problème de Fermat : Étant donné un triangle ABC , trouver un point M du plan rendant minimum la longueur $AM + BM + CM$. Ce point admet pour solution le point de Fermat.
[Bouvier A., George M., Le Lionnais F, 1996]*

On retrouve parfois cette définition-là en exercice dans les manuels du secondaire où il est demandé de montrer que le point de Fermat minimise bien la distance $MA + MB + MC$.

Cependant, cette propriété n'est vraie que dans le cas où F est intérieur au triangle, c'est-à-dire lorsque le triangle n'est pas « trop aplati ». En effet, sur le dessin ci-dessous, le point F qui vérifie la définition du point de Fermat ne minimise pas la longueur !



Nous faisons l'hypothèse que l'absence du point de vue ensembliste dans la démonstration est la cause de cette erreur courante. Il ne suffit pas de bâtir la démonstration sur un triangle qui semble « quelconque » pour prendre en compte tous les cas ! Cette remarque nous amènera à distinguer au chapitre 6 les dessins, les figures et ce que nous appellerons les figures ensemblistes. L'utilisation du cadre ensembliste dans la démonstration sera abordée dès le premier chapitre. Ces différentes réflexions nous ont conduite à nous poser les questions suivantes :

- Quel est l'objet mathématique « implication » ?
- Quelle est sa vie dans l'enseignement des mathématiques ?
- Comment construire une situation qui problématise l'implication ?

En réponse à la première question, nous avons mené, au chapitre 1, une analyse épistémologique du concept mathématique d'implication. Après avoir montré ses analogies et ses différences avec l'objet naturel, nous l'avons étudié sous trois points de vue : le point de vue de la logique formelle, le point de vue ensembliste et le point de vue du raisonnement déductif.

En réponse à la deuxième question, nous avons étudié, dans le chapitre 2, la *vie* de l'implication, relativement à ces trois points de vue, dans quelques manuels du collège à l'université.

Dans le chapitre 3, nous présentons quelques travaux didactiques concernant l'implication et nous présentons les résultats de nos premières recherches. Nous détaillons notamment ce que nous appelons une *conception causale-temporelle* de l'implication.

À la suite de ces résultats, notre hypothèse de travail était la suivante : l'absence de liens entre ces trois points de vue est à l'origine de nombreuses difficultés et erreurs tant dans l'appréhension que dans l'utilisation de l'implication. C'est ainsi que nous avons énoncé notre thèse :

Il est nécessaire de connaître et d'établir les liens entre les trois cadres (logique formelle, ensembliste et raisonnement déductif) pour une bonne appréhension et une bonne utilisation de l'implication.

Et ce jeu de cadre est aussi suffisant, si on arrive à le mettre en œuvre.

Ces questions seront développées dans notre problématique au chapitre 5.

Pour apporter des éléments de réponse à cette thèse nous avons construit une ingénierie didactique qui permette de problématiser l'implication par un *jeu* sur ces trois cadres, en montrant, en particulier, la pertinence du cadre ensembliste pour travailler l'implication. C'est l'étude de cette ingénierie, analyse a priori et résultats, que nous présentons dans la deuxième partie.

Enfin, nous concluons par une synthèse des résultats et quelques perspectives de recherche.