Chapitre 1

Analyse épistémologique et didactique de l'implication, objet naturel et objet mathématique

1. Objet naturel

La notion d'implication existe dans la logique naturelle[1]. Nous l'utilisons tous les jours par exemple lorsque nous disons *le ciel est bleu donc il ne pleuvra pas*, ou *tu auras du dessert si tu manges ta soupe*.... Elle nous est nécessaire pour communiquer à l'aide du langage. Mais, si tout le monde semble se comprendre, il apparaît toutefois que certaines expressions sont ambiguës. De nombreux abus de langage contribuent à rendre floue *l'implication naturelle*[2] qui n'est pas toujours interprétée de la même façon selon le contexte.

[1] Nous appelons *logique naturelle* toutes les règles et conceptions ayant trait au raisonnement, le plus souvent en dehors d'un cadre mathématique, utilisées dans des situations de la vie courante.
[2] Nous appelons *implication naturelle* le concept d'implication de la logique naturelle.

1.1. Confusion avec *seulement si* ou avec *si et seulement si*

Les énoncés conditionnels s'énoncent souvent sous la forme *Q si P* mais ils sont parfois interprétés dans le sens de l'expression *Q seulement si P* ou par l'expression *Q si et seulement si P*. Or, les *significations strictes* de ces expressions sont différentes au moins en mathématique :

Q si P :	P implique Q
Q seulement si P :	Q implique P
Q si et seulement si P :	P équivaut à Q

Les confondre revient donc à identifier l'implication directe avec l'implication réciproque ou l'équivalence. C'est, seul, le contexte qui permet d'interpréter la signification de l'expression.

1.1.1. Deux exemples

<u>Premier exemple</u> [confusion implication directe et implication réciproque]

Considérons la phrase

> D*emain, je t'emmènerai à la piscine (Q) s'il fait beau (P)*

Elle peut aussi s'exprimer par :

> *Si P alors Q* ou encore *P implique Q*

Pourtant, par cette phrase, nous voulons plutôt signifier :

> *S'il fait mauvais demain, je ne t'emmènerai pas à la piscine*

c'est-à-dire :

> *si Non P*[3] *alors Non Q*

ou encore, si l'on utilise l'équivalence de la contraposée[4] avec l'implication directe :

[3] Nous prenons la négation dans son sens naturel, ici *Non P* peut se traduire par *il ne fait pas beau* ou encore *il fait mauvais* (malgré toutes les nuances qu'il y a entre ces deux phrases). *Non Q* peut se traduire par *je ne t'emmènerai pas à la piscine*.

Q implique P

ou enfin :

Q seulement si P

C'est-à-dire que la signification que nous donnons à cette phrase est :

Demain, je t'emmènerai à la piscine ***seulement s'il*** *fait beau*

Et l'enfant à qui cette phrase s'adresse ne s'y trompe pas. Il comprend bien le *si* comme un *seulement si*, lui qui sait que, même en cas de beau temps, une bêtise ou une panne de voiture pourront lui interdire la piscine.

Enfin, le contexte peut changer le sens d'une même phrase. A un enfant à qui on désire faire plaisir, on dira, avec une intonation joyeuse*, demain, s'il fait beau, je t'emmènerai à la piscine !* Alors qu'à un enfant qui réclame d'y aller on pourra dire, en appuyant sur le **si** : *demain, je t'emmènerai à la piscine* ***si*** *il fait beau.* Le désir d'aller à la piscine de la personne qui parle, l'éventualité que cet évènement ait réellement lieu changent d'une phrase à l'autre. Seuls l'intonation, le comportement de celui qui parle et le contexte général permettent à l'auditeur de faire la différence.

<u>Deuxième exemple</u> [confusion implication et équivalence]

De même que précédemment, la phrase

Tu auras un dessert si tu manges ta soupe

signifie plutôt :

Tu auras un dessert ***seulement si*** *tu manges ta soupe*

puisqu'une bêtise en cours de repas peut supprimer le dessert. Mais la phrase est, en fait, plus nuancée. Si l'enfant a mangé sa soupe, et si aucun évènement imprévu n'est arrivé, il s'attend à avoir son dessert et ne pas le lui donner serait, pour lui, une injustice. Cette nuance-là n'est pas sous-entendue dans l'expression *seulement si* au sens strict. L'implication directe est aussi, dans une certaine mesure, attendue :

Si tu manges ta soupe, et s'il ne se passe rien, au cours du repas, qui change la situation présente, tu auras un dessert.

[4] Cette équivalence (i.e. [*P implique Q*] équivalente à [*Non Q implique Non P*]) nous paraît conforme à l'utilisation de l'implication dans la logique naturelle, comme nous aurons l'occasion de le redire dans la suite.

La phrase exprime non seulement qu'il est nécessaire de manger la soupe mais aussi que, sous certaines conditions, cela est suffisant pour avoir un dessert. Les conditions en question étant le plus souvent tacites et comprises par tous suivant le contexte.

C'est donc une interprétation de l'implication comme une équivalence, l' implication en jeu sous-entendant un *contrat* que nous allons maintenant détailler.

1.1.2. Contrat social

<u>Troisième exemple</u> [confusion implication et équivalence]

Voici un texte proposé par J. Rogalski et M. Rogalski dans leur article *Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques*[5].

> *Question de contrat social (les bonbons de la maîtresse)*
> *Dans une école primaire, la maîtresse donne un jour un problème aux élèves, et leur dit : "cherchez ce problème chez vous ; demain, si quelqu'un a su le résoudre, je vous donnerai des bonbons".*
> *Le lendemain, aucun élève n'a su faire le problème. La maîtresse sort un paquet de bonbons et les distribue aux enfants. Ceux-ci protestent : "Ce n'est pas juste, on n'a pas su faire le problème, on n'a pas droit aux bonbons !". Goguenarde, la maîtresse leur répond qu'elle a parfaitement respecté le contrat…*
> *Quels commentaires vous inspire ce récit ?*
> *[Rogalski J., Rogalski M., 2004]*

L'implication énoncée par la maîtresse :

> *Demain, si quelqu'un a su le résoudre (P), je vous donnerai des bonbons(Q)*

que l'on peut traduire par :

> *P implique Q*

est interprétée, par les enfants comme une équivalence. Non seulement, il va de soi que

> *Si quelqu'un trouve la solution il y aura des bonbons*

c'est-à-dire

> *Si P est vrai alors Q est vraie*

mais il est aussi sous-entendu que

[5] Nous présenterons cette étude dans le chapitre sur les travaux didactiques sur l'implication

Si personne ne trouve alors il n'y aura pas de bonbons

ce qui peut s'écrire

Si P est fausse alors Q est fausse

c'est-à-dire

Si Non P alors Non Q

ou encore en utilisant l'équivalence de la contraposée :

Q implique P

La phrase énonçant une implication est donc interprétée comme une équivalence. Ceci peut avoir plusieurs causes.

D'abord, si, quel que soit le résultat de l'exercice, la maîtresse donne des bonbons aux enfants, quel est l'intérêt d'énoncer une implication ? Il suffisait à la maîtresse de dire :

Demain, je vous donnerai des bonbons.

Or elle a relié la distribution des bonbons et le résultat à l'exercice par une implication. Une implication étant le plus souvent considérée comme un lien de cause à effet, c'est donc que la distribution des bonbons dépend du résultat à l'exercice. *S'il n'y avait pas de lien entre les deux, elle n'aurait pas dit cette phrase!*

Deuxièmement, donner un bonbon peut être synonyme de *récompense*. Or, dans la vie de la classe, si on a trouvé un résultat, on mérite une récompense alors que si on ne le trouve pas on ne la mérite pas. Il apparaît alors *injuste* que quelqu'un n'ayant pas trouvé le résultat soit récompensé au même titre que quelqu'un ayant réussi. Les bonbons sont le *privilège* de ceux qui ont trouvé, les autres *n'y ont pas droit*. C'est ce contrat social sous-jacent à l'implication énoncée par la maîtresse qui apparaît ici, dans la protestation des élèves :

Ce n'est pas juste, on n'a pas su faire le problème, on n'a pas droit aux bonbons.

1.1.3. Principe du maximum d'information

Une autre cause de la confusion de l'implication avec l'équivalence est *le principe du maximum d'information* très utilisé implicitement dans la logique naturelle. Ce principe exprime que ce qui ne nous est pas dit n'existe pas, ou tout au moins n'est pas connu, car sinon on nous l'aurait dit. Les phrases contiennent le maximum d'information possible, les informations qu'elles ne contiennent pas ne sont pas vérifiées.

> *Le langage, ayant pour but principal la transmission d'une information, se plie à des conventions, ou plutôt à des habitudes, entre locuteurs et auditeurs. Ceux-ci reçoivent donc une information le plus souvent supérieure à celle contenue en apparence, dans la parole de ceux-là. Ce principe oblige aussi le locuteur à donner l'information la plus complète sur ce qu'il sait ; l'auditeur est donc amené à comprendre que si son interlocuteur n'en dit pas plus, c'est qu'il n'est pas en mesure de le faire.*
> *[Dumont B., cité dans Legrand M.,1983, p70]*

L'expression *n'est pas en mesure de le faire* peut exprimer soit que le locuteur ne sait pas si cette information est vérifiée soit que cette information n'est pas vérifiée. Cette interprétation par l'auditeur dépend du contexte et influe sur sa compréhension des informations contenues dans la phrase.

Dans son article *Cosmonaute*[6], M. Legrand donne un exemple de l'utilisation de ce principe dans la logique naturelle.

> *- Dans le langage courant, l'implication "si...alors..." est presque systématiquement interprétée comme une équivalence ; par exemple : quand je dis : "s'il fait beau, je sortirai", si je suis sorti, "logiquement" la plupart des gens en concluent : "il a fait beau".*
> *- En fait, on ne peut rien conclure en termes de certitude, mais il faut bien reconnaître qu'il y a contradiction apparente à "sortir quand il fait mauvais" après avoir précisé "qu'en cas de beau temps on sortirait".*
> *- Le principe du maximum est très utilisé inconsciemment dans le langage courant et met en conflit "la logique courante" et la "logique scientifique".*
> *[Legrand M.,1983, p65]*

Le *principe du maximum d'information* est encore plus utilisé dans la classe de mathématique, quand l'élève est face à un problème par exemple.

> *Si on ajoute à cette observation applicable à toutes les situations de communication le fait particulier de la classe : « le maître sait tout ce qui est nécessaire pour résoudre les problèmes de la classe », on arrive sans difficulté au postulat suivant : « si le maître ne dit pas quelque chose, c'est que cette chose n'a pas lieu ».*
> *[Legrand M.,1983, p71]*

Les répercussions peuvent être nombreuses sur l'activité dans la classe de mathématique. Cela explique, par exemple, d'après M. Legrand, la difficulté de considérer les carrés comme des rectangles :

> *Refus pour beaucoup d'élèves de considérer un carré comme un rectangle. Car si on sait que c'est un carré et que l'on dit : « c'est un rectangle !» on ne donne pas toute l'information que l'on détient !*
> *[Legrand M.,1983, p71]*

Dans de nombreux cas, une implication énoncée en langue naturelle signifie autre chose ou tout au moins plus que ce qui est réellement dit. Que cela découle d'une interprétation personnelle, d'un contrat social sous-jacent ou du principe du maximum d'information, il n'en reste pas moins que l'implication naturelle est floue et reste tributaire du contexte.

[6] Nous présenterons cette étude dans le chapitre sur les travaux didactiques sur l'implication

1.2. Nécessité d'ordre moral

Les expressions *il faut* et *il suffit* sont liées au concept d'implication dans certains contextes par exemple la phrase :

> *Pour que je sorte il faudra qu'il fasse beau demain*

peut être interprétée :

> *Je sortirai demain seulement s'il fait beau*

Mais ces expressions sont aussi utilisées avec d'autres significations, en particulier souvent une nécessité non pas matérielle mais d'ordre moral.

> *Pour grandir il faut manger de la soupe*

Manger de la soupe n'est pas *nécessaire* au sens strict pour grandir. Cette expression est un abus de langage supposé convaincre l'enfant de satisfaire le désir exprimé par le biais d'une nécessité.

Cette nécessité est parfois énoncée uniquement avec *il faut* sans les mots *pour que*.

> *A table il faut se tenir droit*
> *Il faut dire merci quand on reçoit un cadeau*
> *Il faut être sage à l'école*
> *Il faut venir manger*

Il s'agit alors plutôt de l'expression d'un ordre qu'on pourrait traduire par un impératif.

> *Dis merci !*
> *Viens manger !*

Ces phrases sont alors sans lien avec l'implication, si ce n'est l'expression d'une condition d'ordre moral.

> *Si tu veux souscrire aux règles de politesse, alors dis merci*
> *Si nous voulons manger tous ensemble comme nous en avons l'habitude, alors viens manger tout de suite*

1.3. Prémisse[7] fausse

Dans la logique naturelle, certaines implications ont une hypothèse fausse. Elles traduisent souvent des fantasmes *si j'étais*, *si nous avions*, *si tu pouvais*...Toutefois, toutes les phrases ne sont pas admises, certaines ne veulent rien dire, certaines sont déclarées fausses. Leur statut dépend des contenus sémantiques et des nuances de la langue.

Sachant que je suis une fille, les phrases suivantes ayant toutes les deux une hypothèse fausse sont des implications vraies pour la logique formelle. Pourtant elles n'ont pas le même statut dans la logique naturelle.

> *Si j'étais un garçon, alors j'irais au service militaire.*
> *Si j'étais un garçon, alors j'allaiterais mon bébé.*

La première phrase sera probablement acceptée comme vraie, alors que la seconde sera au contraire probablement déclarée fausse. Suivant le contexte ou la personne qui parle, la première phrase pourra peut-être suggérer quelques oppositions et être déclarée fausse, par exemple :

> *Non, avec ton asthme tu serais réformé !*

Mais, la seconde ne souffrira probablement pas d'autre avis, aucun argument ne le permettant dans le contexte de notre société actuelle. Nous faisons l'hypothèse que c'est, ici, la présence, ou respectivement l'absence, d'un lien sémantique entre l'hypothèse et la conclusion qui permet de déclarer la phrase vraie, ou respectivement fausse.

En effet, pour la première phrase, si l'on se réfère à la France des années 90 par exemple, l'ensemble des garçons de la nation sont appelés au service militaire et les filles ne le sont pas. Si l'on considère les objections de conscience, coopérations, services civils, réformations etc. comme des cas minoritaires, il y a donc obligation pour les garçons français de faire leur service militaire. Quand on est un garçon *on doit* faire son service militaire. Il y a donc un lien explicatif, ici d'obligation, entre le fait d'être un garçon et le fait de faire son service militaire.

En revanche, pour la seconde phrase il y a une impossibilité, un homme, dans l'état actuel de la médecine, *ne peut pas* allaiter. Non seulement il n'y a pas de lien explicatif entre l'hypothèse et la conclusion mais en plus il ne pourrait pas y en avoir un puisqu'il y a incompatibilité entre hypothèse et conclusion. L'hypothèse et la conclusion ne peuvent être vraies en même temps.

---

[7] Nous appellerons *hypothèse* ou *prémisse* le terme placé avant le symbole d'implication. Nous ne sous-entendons pas que *l'hypothèse* ou la *prémisse* est vraie. De même nous appellerons *conclusion* le terme placé après le symbole d'implication.

Le traitement des implications à prémisse fausse dépend du lien sémantique existant ou non entre la prémisse et la conclusion. L'importance du lien sémantique dépasse d'ailleurs largement ce cas, nous y reviendrons dans le paragraphe 1.4 en décrivant ce que nous appelons la *conception causale* de l'implication.

En logique naturelle, contrairement à la logique formelle, pour examiner la validité d'une phrase en *si... alors* on *suppose* que l'hypothèse est vérifiée. C'est-à-dire on considère le cas où l'hypothèse est vraie, ceci même si l'on sait pertinemment qu'elle est fausse. Dans le cas précédent, on sait que je suis une fille et que l'hypothèse est fausse mais pour étudier la vérité de cette phrase, on *fait comme si* j'étais un garçon : que se passerait-il alors ?

Cette supposition est d'ailleurs exprimée par l'utilisation du temps conditionnel. On dit *si j'étais un garçon*, une phrase commençant par *si je suis un garçon* n'a en général aucun sens puisque chacun connaît son sexe. Elle a du sens, par exemple, dans le cadre d'un jeu où l'on doit deviner quel personnage on est censé représenter.

Cette pratique peut se retrouver dans l'utilisation logique du concept d'implication. Nous faisons l'hypothèse que les deux phrases :

> *Si 3 est pair alors 4 est impair*
> *Si 3 est pair alors 4 est pair*

sont interprétées par :

> *Si 3 pair était (réellement) vrai...*
> *Supposons que 3 pair soit vrai...*

En conséquence de notre hypothèse, les statuts de vérité qui leur sont attribués sont différents. La première phrase est déclarée vraie, puisque si l'on suppose que l'hypothèse est vraie, le lien explicatif *un pair est suivi d'un impair* étant conservé, il en résulte que la conclusion est vraie aussi. En revanche, dans la deuxième phrase, le lien explicatif n'est pas conservé. Or, il y a impossibilité que 2 nombres consécutifs soient de même parité. La phrase est donc déclarée fausse.

Par ailleurs, le temps conditionnel exprime des nuances de la langue française qui paraissent difficiles à traduire dans la logique formelle. Par exemple, les deux phrases :

> *Je t'emmènerai à la piscine s'il fait beau.*
> *Je t'emmènerais à la piscine s'il faisait beau.*

n'ont pas la même signification. Dans la première, on ne connaît pas la valeur de vérité de l'hypothèse *il fait beau*, alors que, pour la seconde, on sait que l'hypothèse est fausse ou bien on a de fortes présomptions sur le fait qu'elle est ou sera fausse. La première phrase exprime un évènement susceptible d'arriver, si l'hypothèse se révèle vraie, alors que la deuxième, exprime un évènement dont on sait, avec quasi certitude, qu'il n'arrivera pas.

1.4. Causalité et temporalité

Nous venons de montrer que la présence ou non d'un lien explicatif détermine souvent la vérité d'une implication.

D'ailleurs, une implication entre deux évènements n'ayant aucun lien n'a pas de sens. La phrase

> *Si les souris ont une queue alors Paris est la capitale de la France*

semble vide de sens. Elle peut être déclarée n'ayant aucun sens ou fausse avec l'explication :

> *Ce n'est parce que les souris ont une queue que Paris est la capitale de la France, ce n'est pas la cause !*

La décision de la vérité d'une implication dépend donc des contenus sémantiques et du lien qui les unit, l'absence de lien la faisant juger sans signification.

En réalité, bon nombre des implications de la langue française énoncent un *rapport de cause à effet*. L'hypothèse est la *cause* de la conclusion et la conclusion est la *conséquence* ou *l'effet* de l'hypothèse.

> *Si tu arroses la pelouse alors elle sera mouillée*
> *Si tu pars en retard tu vas rater ton train*
> *Si tu tombes tu vas te faire mal*

Arroser la pelouse est bien la cause qui fait qu'elle sera mouillée. Or, dans le monde physique, la conséquence survient après la cause, même si cela doit être presque immédiat.

J'arrose la pelouse, et après le temps qu'il faut à l'eau pour sortir de mon arrosoir et tomber sur l'herbe, la pelouse est mouillée.

Par suite, dans une implication naturelle de ce type, l'hypothèse doit être vérifiée avant que la conclusion le soit. Une implication connote donc, en logique naturelle, une notion de *causalité*, l'hypothèse est la cause de la conclusion, et une notion de *temporalité*, l'hypothèse a toujours lieu avant la conclusion. Nous verrons que ces notions de causalité et temporalité ont des conséquences importantes sur l'utilisation et la compréhension de l'implication en mathématique, c'est ce que nous étudierons sous le nom de *conception causale-temporelle*.

1.5. Utilisation en situation : causalité, contraposée, absurde...

Après avoir décrit l'implication dans le langage naturel, nous nous intéressons maintenant à l'utilisation de l'implication comme outil de déduction de la logique naturelle.

La notion de temporalité que nous venons de décrire peut être opérationnelle dans certaines situations de déduction. Considérons un garagiste qui doit découvrir la panne d'une voiture. Il peut être amené à faire plusieurs hypothèses sur la panne, la panne peut être due à la pièce A1 ou à la pièce A2 ou... Pour les besoins de notre étude, nous écrirons

A1 : « la pièce A1 ne fonctionne pas »
B : « la pièce B ne fonctionne pas »

Pour savoir d'où vient la panne, le garagiste va donc examiner ses hypothèses. Supposons qu'il sait que quand la pièce A1 est en panne alors la pièce B ne fonctionne pas non plus, c'est-à-dire qu'on a :

si A1 est vraie alors B est vraie

Il va alors tester la pièce B, si la pièce B fonctionne, c'est que la pièce A fonctionne aussi. Ce résultat s'obtient à l'aide du *Modus Tollens*, appelé raisonnement par contraposition en mathématique :

A implique B est vraie
Or B est fausse
Donc A est fausse

La notion de causalité connotée par l'implication est donc, ici, un outil efficace. La causalité est vue par la temporalité, c'est un effet immédiat qui permet de repérer la cause.

L'utilisation de la contraposée d'une implication se retrouve dans les enquêtes policières ou au moins dans les romans policiers. Les hypothèses et conclusions sont aussi exprimées comme des causes et conséquences.

Ces ambiguïtés de la langue française, qu'elles soient dues à des abus de langages, à des interprétations dépendant du contexte, à des interprétations en terme de causalité et temporalité, rendent confus le concept naturel d'implication. Ceci aura, évidemment, des conséquences sur la compréhension et l'utilisation de concept mathématique que nous allons présenter maintenant.

2. Objet mathématique

2.1. Objet mathématique : modélisation de l'objet naturel

Le **concept mathématique d'implication** peut alors être interprété comme un **modèle** du concept de la logique naturelle. Comme tout modèle, le concept mathématique est fidèle à l'objet naturel sous certains aspects et moins, voire pas du tout, sous d'autres. C'est-à-dire qu'il vérifie certaines propriétés et d'autres pas, certaines propriétés logiques vont même parfois à l'encontre de la logique naturelle. Ainsi, la vérifonctionnalité[8] de l'implication mathématique n'est pas proche de la logique naturelle. En revanche, l'équivalence de la contraposée avec l'implication directe est conforme au *Modus Tollens*[9] de la logique naturelle.

2.2. Trois cadres pour l'implication

Le concept d'implication, omniprésent dans l'activité mathématique, apparaît sous différentes formes selon les cadres mathématiques dans lesquels on le trouve. Pour cette étude épistémologique, nous avons choisi de distinguer trois points de vue ou *cadres* au sens de Régine Douady. Le cadre théorique qu'elle a défini nous est apparu pertinent pour notre recherche puisqu'elle soutient que les *changements de cadres* sont nécessaires à l'enseignement d'un concept. C'est aussi notre thèse, nous y reviendrons lorsque nous définirons notre problématique. Pour introduire cette étude du concept mathématique, nous voulons rappeler quelques définitions introduites par Régine Douady dans la continuité de la *théorie des champs conceptuels* de G. Vergnaud.

> *Nous disons qu'un concept est un outil[10] lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par objet, nous entendons l'objet culturel savant ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement.*
> *[Douady R. 1986, p9]*
> *Le mot « cadre » est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique..., mais aussi cadre qualitatif ou cadre algorithmique. Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement*

---

[8] En logique formelle, la valeur de vérité de A $\Rightarrow$ B ne dépend que des valeurs de vérité respectives de A et de B et non de leur contenu sémantique. C'est ce que nous appelons *vérifonctionnalité de l'implication*, nous le détaillerons dans le paragraphe 3.

[9] Le Modus Tollens est la règle de déduction : De Non B et A $\Rightarrow$ B, on peut déduire Non A, nous y reviendrons dans le paragraphe 5.

[10] Souligné dans le texte.

> *diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée.*
> *[Douady R. 1986, p10]*

Nous avons choisi de mener notre analyse épistémologique à partir de trois *cadres* qui nous paraissent pertinents pour l'implication :

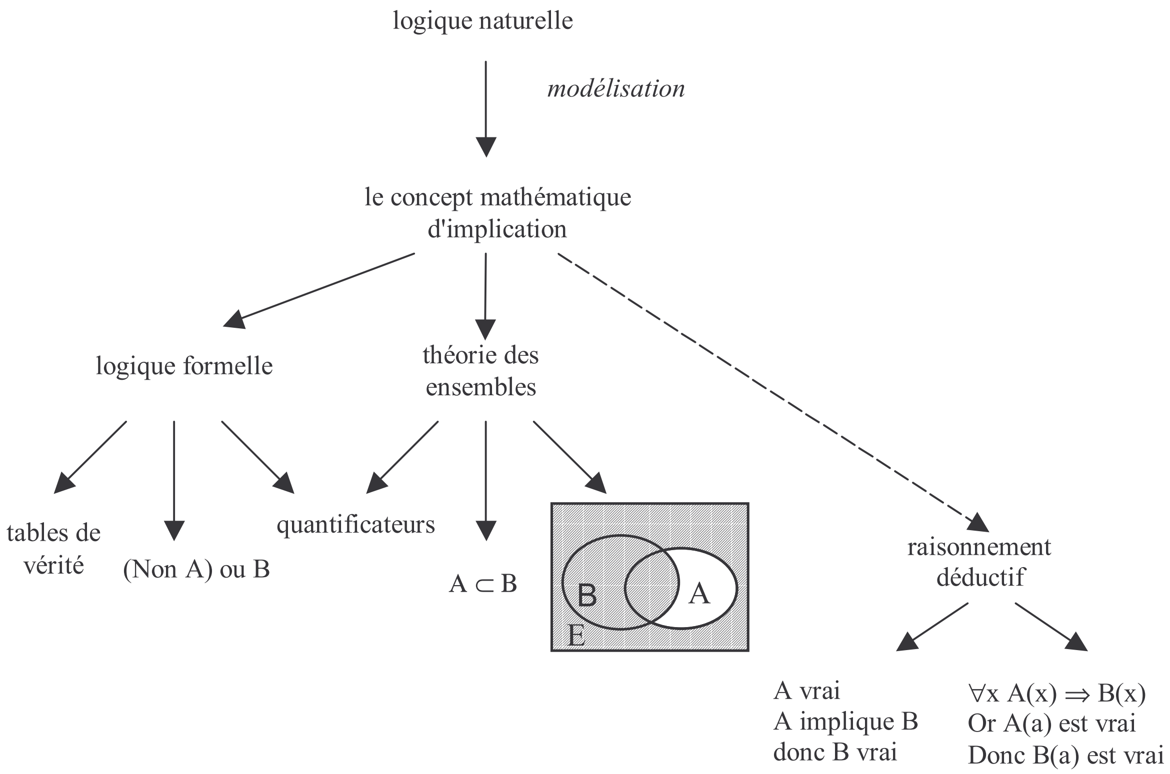
- le cadre ensembliste
- le cadre de la logique formelle
- le cadre du raisonnement déductif

Le troisième cadre n'a pas le même statut que les deux autres. Alors que les deux autres font référence à des théories mathématiques, *théorie des ensembles* et *logique formelle*, celui-ci est le cadre de *l'utilisation* habituelle de l'implication mathématique. En effet, il ne s'agit pas de définir *l'objet* implication mais d'utiliser *l'outil* implication dans un raisonnement mathématique. Ce point de vue est couramment utilisé dans la pratique mathématique et, omniprésent dans l'enseignement des mathématiques, il y fait souvent office de seule définition.

Nous définirons le cadre du raisonnement déductif comme *constitué par les objets liés au raisonnement déductif, les relations entre ces objets, leurs formulations et les images mentales associées à ces objets et ces relations.*

Le mot *cadre* n'est pas à prendre au sens strict, il peut être pris au sens de *point de vue* mais sa portée est plus grande. En fait, *se placer dans le cadre ensembliste* ou *adopter le point de vue ensembliste* pour résoudre un problème de mathématique, ce n'est pas seulement utiliser les outils de la théorie des ensembles, c'est aussi *réfléchir* de façon ensembliste, c'est voir le problème avec un œil ensembliste, c'est presque *vivre les mathématiques* de façon ensembliste.

Le schéma ci-dessous présente l'implication mathématique, modèle de l'implication naturelle, dans les trois cadres.



Il ne s'agit pas, pour nous, de décrire les cadres mathématiques mais de décrire, au sens large du terme, l'objet ou l'outil implication dans ces cadres. Ce tableau est détaillé dans les paragraphes suivants qui présentent les trois cadres.

3. Le cadre de la logique formelle

3.1. Définitions

Notre objectif n'est pas de faire ici un cours de logique formelle mais de donner quelques éléments théoriques pour permettre d'étudier le concept logique d'implication et de mieux comprendre certaines utilisations abusives. Pour définir ce concept, rappelons quelques règles de la logique formelle et la définition de trois connecteurs logiques qui lui sont liés.

3.1.1. Quelques conventions

Nous utiliserons le mot *proposition* selon la définition utilisée par V. Durand-Guerrier :

> *En logique classique, une proposition est une entité linguistique qui porte le vrai ou le faux.*
> *[Durand-Guerrier, 1999, p65]*

Dans le cadre de la logique des propositions, les conventions sont :

- *Bivalence des propositions :*

Une proposition a exactement deux valeurs de vérité possibles : Vrai ou Faux.

- *Propriété du tiers exclu :*

Une proposition est soit vraie soit fausse, jamais les deux en même temps.

- *Vérifonctionnalité :*

La valeur de vérité d'une phrase ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu et de la définition des connecteurs qui les relient. En particulier, la valeur de vérité de la phrase ne dépend ni du contexte, ni des contenus sémantiques des propriétés en jeu.

Ainsi, on peut définir la *table de vérité* de chaque connecteur. C'est la table qui représente les valeurs de vérité que ce connecteur affecte à une proposition composée le contenant, en fonction des valeurs de vérité des propositions en jeu dans cette phrase[11].

Il en résulte que deux connecteurs ayant des tables de vérité identiques sont logiquement équivalents.

Ces conventions régissent la logique formelle et contraignent ce modèle. Alors que la propriété du tiers exclu paraît adaptée à la logique naturelle, la vérifonctionnalité de l'implication, par exemple, paraît contraire à celle-ci. Comme nous l'avons vu, la vérité d'une implication naturelle dépend beaucoup du contexte et de la sémantique, en particulier un lien explicatif entre hypothèse et conclusion existe toujours. Quant à la bivalence, elle est adaptée aux propositions, alors que la logique naturelle paraît mieux représentée par des énoncés contingents.

> *Un énoncé est contingent pour un sujet donné à un instant donné t si le sujet n'a pas, à l'instant t, les moyens de savoir si cet énoncé est vrai ou faux.*
> *[Durand-Guerrier, 1999, p70]*

Par exemple dans la phrase, *Si je réussis mon examen, je m'achèterai une nouvelle voiture*, on ne peut connaître la valeur de vérité de l'hypothèse avant que l'examen ne soit passé, l'hypothèse est donc un énoncé contingent. Mais, alors que dans cette phrase, l'hypothèse ne peut avoir que deux

[11] Nous allons donner dans la suite de nombreux exemples de tables de vérité

valeurs de vérité, soit je réussis mon examen, soit je ne le réussis pas, d'autres phrases en langue naturelles ne sont pas aussi tranchées.

Par exemple dans la phrase, *si j'étais riche, je m'achèterais une nouvelle voiture*, l'hypothèse, *si j'étais riche*, ne répond pas à la bivalence. Entre le vrai et le faux, il faut accepter une infinité de nuances dont par exemple, *je suis assez riche pour avoir une voiture mais pas assez pour en acheter une nouvelle tout de suite*. La valeur de vérité de l'hypothèse dépend de la société, du moment, et évidemment de ce que la personne qui prononce cette phrase sous-entend par le mot *riche*, et ceci sans oublier qu'une même personne peut à la fois se dire riche ou bien pauvre selon le contexte dans lequel elle place sa phrase. Les nuances de la langue française apparaissent bien loin de la bivalence des propositions, contrainte pourtant nécessaire du modèle logique.

3.1.2. Quelques connecteurs : négation, conjonction, disjonction

Soit A et B des propositions.

La proposition appelée *négation de A*, notée *Non A* ou bien $\neg A$, est la proposition qui est fausse lorsque A est vraie et vraie lorsque A est fausse. Voici la table de vérité[12] du connecteur *Non* :

A	Non A
V	F
F	V

La proposition appelée *conjonction de A et B*, notée *A Et B* ou bien $A \wedge B$, est la proposition qui est vraie si et seulement si A et B sont toutes les deux vraies. Voici la table de vérité du connecteur *Et* :

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La proposition appelée *disjonction de A et B*, notée *A Ou B* ou bien $A \vee B$, est la proposition qui est fausse si et seulement si A et B sont toutes les deux fausses. Voici la table de vérité du connecteur *Ou* :

[12] V (resp. F) signifie que la proposition de la colonne concernée a la valeur de vérité VRAI (resp. FAUX)

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3.2. Construction de l'implication logique : conformité et contradictions avec l'implication naturelle

Nous voulons montrer dans ce paragraphe comment construire l'implication, objet de la logique formelle, comme modèle de l'implication de la logique naturelle. Il faut donc définir un connecteur, aussi proche que possible de l'implication naturelle, tout en respectant les conventions qui régissent la logique formelle et que nous avons décrites ci-dessus.

Si l'on se place dans le cadre de ces conventions, la logique naturelle nous permet de construire les deux lignes de la table de vérité pour lesquelles l'hypothèse est vraie. Lorsque l'hypothèse est vraie et la conclusion fausse, il est naturel de dire que *A implique B* est fausse. Lorsque l'hypothèse et la conclusion sont vraies, il serait contraire à la logique naturelle de décider que l'implication *A implique B* est fausse, nous la dirons donc vraie, pour satisfaire la bivalence. Le modèle logique ne peut traduire la notion de causalité sous-jacente au concept naturel d'implication, puisqu'il doit répondre à la nécessité de la vérifonctionnalité. Dès lors, les deux premiers choix proposés pour la définition de l'implication logique paraissent être ceux le plus en accord avec la logique naturelle.

Remplissons partiellement la table de vérité de l'implication logique à l'aide de la logique naturelle.

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	-
F	F	-

Il s'agit maintenant de décider si l'implication est vraie ou fausse dans les deux cas où la prémisse est fausse.

En se plaçant dans la logique naturelle, on peut montrer que l'implication *A implique B* est équivalente à sa contraposée[13] *(Non B) implique (Non A)*. Pour cette démonstration, nous allons utiliser la bivalence des propositions, la propriété du tiers exclu et le fait que *A implique B* est vraie dans la logique naturelle dès que la propriété *si A est vraie alors B est vraie* est vérifiée. Cela nous paraît assez conforme à la logique naturelle pour cette question.

Supposons donc que *A implique B* est vraie. Supposons, de plus, que Non B est vraie (c'est-à-dire que B est fausse). Si A était vraie alors B serait vraie, puisque l'on a l'implication *A implique B*, or B est fausse, c'est donc que A est fausse, c'est-à-dire que Non A est vraie. En conclusion, sous ces hypothèses, l'implication de la logique naturelle *Non B implique Non A* est vérifiée, puisque lorsque Non B est vrai, Non A l'est aussi.

Lorsque l'implication naturelle *A implique B* est vraie, l'implication naturelle *Non B implique Non A* est vraie aussi. On peut montrer de la même façon la réciproque et conclure à l'équivalence de ces deux implications dans la logique naturelle.

Pour être conforme à la logique naturelle sur ce point, le modèle mathématique doit donc garantir l'équivalence de l'implication et de sa contraposée. Pour vérifier cette équivalence, l'implication logique et sa contraposée doivent avoir des tables de vérité identiques. Construisons-les en partie.

A	B	$A \Rightarrow B$	Non B	Non A	Non B $\Rightarrow$ Non A
V	V	V	F	F	-
V	F	F	V	F	F
F	V	-	F	V	-
F	F	-	V	V	V

Pour avoir l'équivalence, il faut que les troisièmes et sixièmes colonnes soient identiques. La table de vérité de l'implication logique devient donc :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	-
F	F	V

Au point de l'analyse où nous sommes, nous pouvons donner deux définitions possibles, sous ces hypothèses, de l'implication logique :

[13] En fait, le terme *contraposée* est déjà un terme issu du modèle mathématique. Dans la logique naturelle, on utilise la règle de déduction du *Modus Tollens*.

première définition :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	**Vrai**
F	F	V

deuxième définition :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	**Faux**
F	F	V

Cependant, nous remarquons que cette deuxième définition possible de l'implication est symétrique par rapport à A et à B, c'est-à-dire que A et B ont le même *rôle*. Nous sommes, en fait, en présence de la table de vérité de l'**équivalence**.

Or ceci est contraire à l'implication naturelle pour laquelle, malgré les ambiguïtés que nous avons relevées, les rôles respectifs de la prémisse et de la conclusion ne sont pas les mêmes. En effet, considérer l'implication comme une équivalence reviendrait à identifier *la cause* et *l'effet* en logique naturelle. Or, bien que cela se fasse parfois, la plupart du temps, nous avons besoin de le distinguer, ne serait-ce que parce qu'un *effet* peut avoir des *causes* très différentes qui ne sont pas équivalentes entre elles et qui peuvent même n'avoir aucun lien. Il est donc nécessaire, dans la logique naturelle de bien différencier l'implication et l'équivalence même si, parfois, elles sont confondues dans le contexte.

La deuxième table de vérité ne peut donc pas convenir si le modèle veut rester fidèle en ce qui concerne la distinction de l'implication et de l'équivalence. La définition de l'implication dans le modèle mathématique doit bien être celle donnée par la première table de vérité, c'est donc :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cette définition donne la valeur de vérité vraie à l'implication dont la prémisse est fausse. Cela est contraire à la logique naturelle, comme nous l'avons dit les implications à prémisse fausse sont parois déclarées sans intérêt, parfois fausses, ou encore vraies si l'on peut trouver un lien explicatif entre hypothèse et conclusion. De toutes façons, ce n'est, en aucun cas, le fait qu'elles aient une prémisse fausse qui permet de décider si ces implications sont vraies.

Cependant, sous les conventions précitées et voulant rendre compte de certains aspects de la logique naturelle, le modèle mathématique est unique et, comme nous l'avons montré, cette règle n'est pas arbitraire. Il n'existe pas une unique façon de modéliser la logique naturelle, mais ce choix-là permet de rendre compte de la contraposée et de la distinction implication / équivalence, compte tenu des conventions précitées.

Toutefois, comme nous l'avons dit, les conventions de la logique formelle sont des nécessités de ce système qui ne sont pas toutes conformes à la logique naturelle. En particulier, la vérifonctionnalité et la bivalence, appropriées aux propositions, paraissent loin de la logique naturelle décrite plutôt par les énoncés contingents. Ce modèle mathématique ne doit donc pas être utilisé pour traiter n'importe quelles implications naturelles, en particulier celles dont l'hypothèse et la conclusion n'ont pas de lien entre elles. Il n'est pas conçu pour cela. Par exemple, il paraît absurde d'utiliser ce modèle pour traiter l'implication *si je vais me promener demain, alors Madrid est la capitale de l'Angleterre*. En effet, le modèle mathématique donne pour résultat que l'implication est fausse si je vais réellement me promener demain alors qu'elle est vraie si je n'y vais pas. Il est contraire à la logique naturelle que la vérité de l'implication dépende de ma promenade. Bien sûr, dans le modèle mathématique, cela n'influe pas sur la vérité de la conclusion *Madrid est la capitale de l'Angleterre* puisque, dans le cas où la prémisse est fausse, la vérité de la conclusion ne peut être conclue malgré la vérité de l'implication. Cependant, la vérité de la conclusion paraît sous-entendue par la vérité de l'implication dans la logique naturelle. Ainsi, le traitement mathématique de cette implication ne prend aucun sens dans la logique naturelle.

En résumé, ce modèle mathématique est donc conforme à la logique naturelle sous certains aspects (tiers exclu, A implique B est fausse dès que A est vraie et B est fausse, A implique B est vraie dès que A et B sont vraies, équivalence de l'implication avec sa contraposée, distinction de l'équivalence et de l'implication…) et ne l'est pas sous d'autres (A implique B est vraie dès que A est fausse, vérifonctionnalité et donc possibilité de donner une valeur de vérité à une implication qui peut paraître « absurde »…).

3.3. Autre écriture de l'implication logique

On écrit parfois l'implication $A \Rightarrow B$ sous la forme $A \supset B$. Nous n'utiliserons pas cette écriture dans la suite mais nous serons amenée à y faire référence.

3.4. Condition nécessaire, condition suffisante, équivalence

Supposons que l'implication $A \Rightarrow B$[14] est vraie.

[14] Le dictionnaire des mathématiques [Bouvier A., George M ., Le Lionnais F., 1993] donne la définition de *condition nécessaire*, *condition suffisante*, dans le cas où A et B sont des propositions. Cependant, V. Durand-Guerrier [Durand-

On dit alors que A est une *condition suffisante* pour B et que B est une *condition nécessaire* pour A.

Lorsque les deux implications A $\Rightarrow$ B et B $\Rightarrow$ A sont vraies. On dit que A (resp. B) est une *condition nécessaire et suffisante* pour B (resp. A). On peut dire aussi que A et B sont *équivalentes* et l'on note A $\Leftrightarrow$ B. L'équivalence est vraie lorsque (A et B) est vraie ou lorsque (A et B) est fausse. Voici la table de vérité de l'équivalence :

A	B	A $\Leftrightarrow$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3.5. Propriété de l'implication logique

L'implication logique *A* $\Rightarrow$ *B*, est équivalente à *(Non A) ou B*. En effet, construisons les tables de vérité :

A	B	A $\Rightarrow$ B	Non A	Non A ou B
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Les deux phrases *A* $\Rightarrow$ *B* et *(Non A) ou B* ont les mêmes valeurs de vérité (colonne 3 et colonne 5), elles sont donc équivalentes.

L'implication est fausse uniquement dans le cas où *(Non A) ou B* est fausse, c'est-à-dire uniquement dans le cas où *A et Non B* est vraie. C'est ce que nous retrouvons en lisant la table de vérité, l'implication est fausse lorsque A est vraie et B est fausse.

Guerrier, 1996, p167] défend le fait que cette définition prend du sens uniquement dans le cas où l'implication est universellement quantifiée. Nous détaillerons ceci dans le chapitre présentant les travaux didactiques.

3.6. Utilisation de l'implication logique : interprétation universellement quantifiée implicite dans l'enseignement

La table de vérité de l'implication, définie ci-dessus, peut être utilisée pour décider de la véracité d'implications entre propositions de la forme $P \Rightarrow Q$. Les implications *3 pair implique 4 impair* et *3 pair implique 4 pair*, par exemple, sont vraies car la prémisse *3 pair* est fausse. L'implication *3 impair implique 4 pair* est vraie car la prémisse et la conclusion sont vraies, enfin l'implication *3 impair implique 4 impair* est fausse car la prémisse est vraie alors que la conclusion est fausse.

En revanche, elle ne permet pas de décider la véracité d'une implication, entre énoncés contingents, non quantifiée, de la forme $P(x) \Rightarrow Q(x)$[15], où P et Q sont des prédicats. L'implication, *si x est un rectangle alors x est un carré*, où x est un objet, est parfois vraie, lorsque x n'est pas un rectangle (prémisse fausse) ou lorsque x est un carré (conclusion vraie), ou parfois fausse lorsque x est un rectangle et n'est pas un carré (prémisse vraie et conclusion fausse). Cette implication est une *phrase ouverte*, ce *n'est pas une proposition, elle correspond à une propriété […] qui peut être satisfaite par certaines assignations d'objets, non satisfaite par d'autres* [Durand-Guerrier V. et al., 2000, p. 9].

Cependant, la table de vérité permet de décider pour des implications universellement quantifiées, de la forme $\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$. La quantification universelle permet de transformer la *phrase ouverte* $P(x) \Rightarrow Q(x)$, dont la valeur de vérité dépend de x, en une *phrase close* qui est vraie uniquement lorsque la *phrase ouverte* correspondante est vraie pour tous les objets de l'univers du discours, ici E.

L'implication *tout carré est un rectangle* est vraie dans l'ensemble des quadrilatères car, quel que soit l'objet x de cet ensemble, lorsque l'énoncé contingent *x est un carré* est vrai, l'énoncé contingent *x est un rectangle* est vrai également, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de x qui soit un carré sans être un rectangle. L'implication entre énoncés contingents *si x est un carré alors x est un rectangle* [$P(x) \Rightarrow Q(x)$] est vraie pour tous les x, que x rende la prémisse vraie ou fausse. L'implication universellement quantifiée précédente est donc bien vraie.

Au contraire, l'implication universellement quantifiée *tout rectangle est un carré* est fausse car il existe un contre-exemple, c'est-à-dire un x pour lequel l'implication entre énoncés contingents $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est fausse, c'est-à-dire un x tel que la prémisse soit vraie alors que la conclusion est fausse.

[15] $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est une implication entre prédicats, elle est parfois appelée *conditionnel ouvert* [Durand-Guerrier, 2003], nous l'appellerons *implication entre énoncés contingents* pour faire ressortir la notion de contingence.

Pour démontrer qu'une implication universellement quantifiée est vraie, il faut et il suffit de démontrer que pour tous les x tels que la prémisse P(x) est vraie, la conclusion Q(x) est vraie aussi, puisque la phrase ouverte correspondante $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est vraie, par définition, pour les x tels que la prémisse P(x) est fausse.

Enfin, nous voulons attirer l'attention du lecteur sur le fait que, dans la pratique mathématique scolaire, l'implication entre énoncés contingents $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est souvent confondue avec l'implication universellement quantifiée correspondante $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ [Durand-Guerrier, 1996 & 1999]. En effet, dans les classes, la grande majorité des professeurs déclarent que la phrase *si x est un rectangle alors x est un carré* est fausse, puisqu'il existe des rectangles qui ne sont pas des carrés. Ils interprètent donc le *si...alors...* comme une implication universellement quantifiée et donnent un contre-exemple.

Dans le paragraphe sur le raisonnement déductif, nous reviendrons sur ces pratiques mathématiques concernant l'utilisation et l'écriture de l'implication.

3.7. Négation de l'implication dans le cadre logique : deux types de *faux*

La négation de $A \Rightarrow B$ est, d'après ce que nous venons de voir, équivalente à la négation de *(Non A) ou B,* i.e. à *Non [(Non A) ou B]*. Les lois de De Morgan donnent la négation d'une phrase contenant le connecteur *Ou* :

Non (P Ou Q) = (Non P) Et (Non Q)

Cette égalité peut d'ailleurs être démontrée facilement par l'identité des tables de vérité de ces deux phrases. Rappelons que la négation de Non A est A elle-même, ceci peut aussi être démontré au moyen des tables de vérité, il en résulte que la loi de Morgan appliquée à notre phrase donne :

Non [(Non A) ou B] = A et Non B

Pour les propositions, la négation de $A \Rightarrow B$ s'exprime donc par la phrase *A et Non B.*

Dans les énoncés contingents, pour un élément x fixé, la négation de $A(x) \Rightarrow B(x)$ est traduite de la même façon par [A(x) et Non B(x)].

La négation d'une implication universellement quantifiée $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ signifie que les implications entre énoncés contingents correspondantes ne sont pas toutes vraies. C'est-à-dire qu'il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $A(x) \Rightarrow B(x)$ soit fausse ou encore tel que

[A(x) et Non B(x)] soit vraie. Ainsi, la négation d'une implication universellement quantifiée s'exprime de la façon suivante :

$\exists x \in E$ tel que [A(x) et Non B(x)]

ou

$\exists x \in E$ tel que A(x) vrai et B(x) faux

ou encore

Il existe un élément x de E qui vérifie la propriété A sans vérifier la propriété B

Un tel élément de E est appelé, dans la pratique mathématique, un contre-exemple. Il suffit donc d'un seul contre-exemple pour qu'une implication universellement quantifiée soit fausse.

Il y a donc une différence de statut entre *l'affirmation* d'une implication universellement quantifiée, qui signifie que toutes les implications entre énoncés contingents sont vraies, et la *négation* de cette même implication qui signifie seulement qu'au moins une des implications entre énoncés contingents est fausse.

De plus, une implication universellement quantifiée peut être fausse parce qu'il existe un contre-exemple :

$\exists x \in E$ tel que A(x) vrai et B(x) faux

ou bien fausse parce que l'implication entre énoncés contingents correspondante est fausse pour tous les éléments de E.

$\forall x \in E$, A(x) vrai et B(x) faux

Le modèle mathématique ne permet pas de différencier ces deux types de *faux*, l'implication est déclarée fausse dans les deux cas. Cela peut conduire à des erreurs dans le maniement de l'implication, comme nous le montrerons plus tard.

4. Le cadre ensembliste

Il ne s'agit pas, dans ce paragraphe, de faire un cours sur la théorie des ensembles mais d'expliquer ce que nous entendons par cadre ensembliste avant de décrire l'implication sous ce point de vue.

4.1. Les propriétés d'objets dans le cadre ensembliste

Se placer dans le cadre ensembliste ne signifie pas, pour nous, qu'il faut nécessairement connaître et maîtriser la théorie des ensembles, même si l'on est amené à en utiliser quelques outils.

Cela signifie, avant tout, qu'on considère les propriétés d'objets non comme des qualités des objets mais comme des spécificités d'ensembles d'objets. Une propriété définit un ensemble, l'ensemble des objets qui vérifient cette propriété. Prenons un exemple :

Si A est la propriété : *être un quadrilatère avec quatre côtés de même longueur*

Alors l'ensemble correspondant est l'ensemble *A* des *losanges*.

Réciproquement, un ensemble *A* définit la propriété A qui s'énonce *appartenir à l'ensemble A*.

Nous adopterons dans la suite la convention suivante : la lettre majuscule A représente la propriété A et la lettre majuscule en italique *A* représente l'ensemble *A* des objets qui vérifient la propriété A.

Pour travailler dans le cadre ensembliste, on se place, dans un *ensemble de référence* ou *univers*. L'ensemble *A* correspondant à la propriété A dépend, le plus souvent, de cet ensemble de référence.

Dans l'exemple précédent, l'ensemble de référence est l'ensemble des quadrilatères *Q*, il est englobé dans la propriété A. Dans cet ensemble *Q*, la propriété A', *avoir 4 côtés de même longueur*, correspond à l'ensemble *A* des losanges. Cependant, dans l'ensemble de référence des rectangles, que nous noterons *R*, l'ensemble correspondant à la même propriété A' est cette fois, l'ensemble des carrés.

Un seul ensemble peut représenter plusieurs propriétés a priori différentes. Par exemple, dans l'ensemble des parallélogrammes, les propriétés *avoir quatre côtés de même longueur* et *avoir les diagonales perpendiculaires* sont équivalentes et représentent toutes les deux l'ensemble des losanges. De même dans les quadrilatères, les trois propriétés *avoir des côtés opposés parallèles deux à deux* ; *avoir* *deux côtés opposés parallèles et de même longueur* ou encore *avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu* correspondent à l'ensemble des parallélogrammes.

4.2. Deux exemples pour illustrer le cadre ensembliste

Dans ce paragraphe, nous essayons de montrer, sur deux exemples, comment le cadre ensembliste peut être un outil efficace pour démontrer des implications. Regarder les propriétés des objets comme des ensembles d'objets et non pas comme des qualités d'objets peut se révéler économique.

4.2.1. Parallélogrammes

Notre premier exemple est volontairement très simple, il se rapporte aux parallélogrammes.

Dans les quadrilatères, il n'est pas évident, si l'on reste au niveau des propriétés de démontrer l'équivalence :

Avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu $\Leftrightarrow$ *Avoir les côtés parallèles deux à deux*

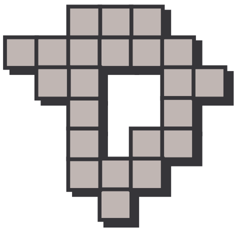
Il faut utiliser des propriétés sur les angles, sur les triangles égaux...

Au contraire, si l'on considère les classes d'objets, les deux propriétés déterminant le même ensemble, celui des parallélogrammes, l'équivalence est claire.

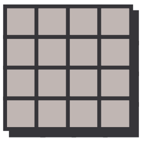
Cependant, l'étude de la géométrie dans le secondaire amène plutôt à considérer les propriétés des objets comme des qualités de ces objets. Ce sont les objets parallélogrammes qui ont la qualité d'avoir les côtés opposés deux à deux parallèles et non pas l'ensemble des objets qui ont des côtés deux à deux parallèles qui sont des parallélogrammes, même si cette nuance peut apparaître très fine. Cela vient, très certainement, du fait que les classifications des objets se sont faites de façon perceptive. On connaît l'allure globale d'un parallélogramme, d'un triangle équilatéral alors que l'on ne connaît pas celle d'un quadrilatère avec deux côtés opposés égaux. Une fois que l'on identifie, *de manière perceptive,* le parallélogramme, on décrit ses qualités. Ce *point de vue* a une grande influence sur le maniement de l'implication dans les preuves, en particulier en géométrie, c'est ce que nous nous attacherons à montrer dans la suite de notre thèse.

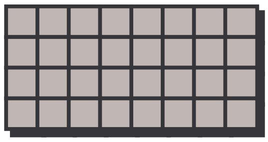
4.2.2. Polyminos

Un polymino[16] peut être défini comme un assemblage connexe[17] de cases dans le plan.

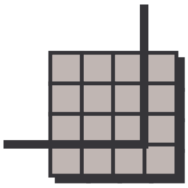


On peut aussi définir des polyminos carrés ou des polyminos rectangles.

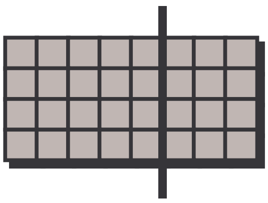


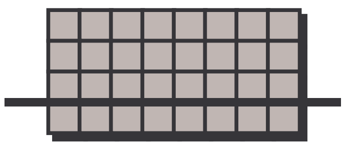


Supposons que l'on cherche à démontrer, par induction, une propriété sur les polyminos carrés. Pour rester dans la classe des carrés, il faut découper en L, comme ci-dessous, ce qui est difficile à mettre en oeuvre. En effet, il faut contrôler son découpage et la plupart du temps c'est impossible.



En revanche, si l'on considère l'ensemble des polyminos carrés comme un sous-ensemble particulier des polyminos rectangles, on peut essayer de démontrer cette propriété par induction sur l'ensemble des polyminos rectangles. Le découpage est alors beaucoup plus facile, que l'on coupe suivant une ligne verticale ou suivant une ligne horizontale, on reste dans la classe des polyminos rectangles.





[16] Nous redéfinirons les polyminos plus en détail dans la description des problèmes de l'ingénierie.
[17] *Connexe* signifie ici que les cases sont adjacentes par un côté et non par un coin.

Certaines propriétés sur le pavage des polyminos carrés peuvent ainsi être démontrées beaucoup plus facilement sur la grande classe des polyminos rectangles. Cela n'est pas toujours possible, mais on peut en voir un bon exemple dans [Grenier D., Payan C., 1998 & 2003].

D'une façon générale, la pratique scolaire demande souvent de démontrer une propriétés sur une classe plus petite que celle sur laquelle elle est vraie. Pourtant, si, au cours de la recherche, on se pose la question de savoir quelles propriétés sont utilisées dans la démonstration et sur quelles classes d'objets elles sont vérifiées, ce contrôle permet de déterminer la plus grande classe sur laquelle la propriété est vraie.

C'est cette façon de concevoir les propriétés comme des ensembles d'objets associée à la faculté de contrôler les ensembles dans lesquels on est que nous appelons *travail dans le cadre ensembliste*.

4.3. Mise en relation avec les connecteurs logiques : complémentaire, union, intersection

Une propriété étant assimilée à un ensemble, nous allons montrer dans la suite, comment les connecteurs de la logique formelle sont associés à des outils du cadre ensembliste.

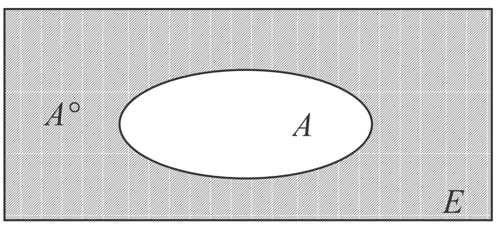
Nous ne définirons pas les termes d'ensembles et d'appartenance, nous les utiliserons dans leur signification habituelle. Nous utiliserons indistinctement les expressions *x appartient à l'ensemble A* ou *x est dans A*.

Plaçons-nous dans un ensemble de référence E.

Soit A le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient la propriété A.

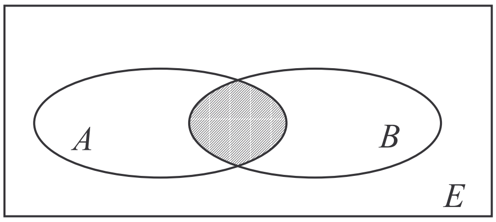
Soit B le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient la propriété B.

Nous appellerons *complémentaire de A dans E* l'ensemble des objets de E n'appartiennent pas à A. Nous le noterons A^c ou bien A^{cE}, lorsque l'ensemble de référence peut porter à confusion. A^c est représenté par l'ensemble hachuré ci-dessous :



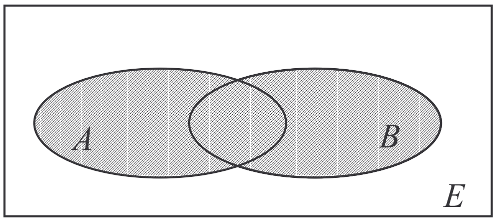
A^c est l'ensemble des objets de E qui ne vérifient pas la propriété A, c'est donc l'ensemble correspondant à la propriété Non A.

Nous appellerons *intersection de A et B* l'ensemble des objets de E qui appartiennent à la fois à A et à B. Nous le noterons $A \cap B$. $A \cap B$ est représenté par l'ensemble hachuré ci-dessous :



$A \cap B$ est l'ensemble des objets de E qui vérifient à la fois la propriété A et la propriété B. C'est donc l'ensemble correspondant à la propriété (A et B).

Nous appellerons *union de A et B* l'ensemble des objets de E qui appartiennent à A ou qui appartiennent à B ou qui appartiennent à l'intersection de A et B. Nous le noterons $A \cup B$. $A \cup B$ est représenté par l'ensemble hachuré ci-dessous.



$A \cup B$ est l'ensemble des objets de E qui vérifient la propriété A ou bien la propriété B ou les deux. C'est donc l'ensemble correspondant à la propriété (A ou B).

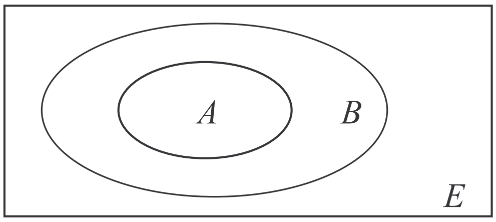
4.4. L'implication dans le cadre ensembliste

4.4.1. L'inclusion

Plaçons-nous dans un ensemble de référence E.

Soit A et B des sous-ensembles de E.

On dit que A est inclus dans B et nous noterons $A \subset B$ si tous les éléments de l'ensemble A sont aussi des éléments de l'ensemble B. Nous parlerons aussi d'inclusion de A dans B, que nous représenterons comme dans le schéma ci-dessous.



Ainsi, lorsque l'on se place dans un ensemble de référence E, cela revient à dire que tous les ensembles qui vont être considérés sont inclus dans cet ensemble E.

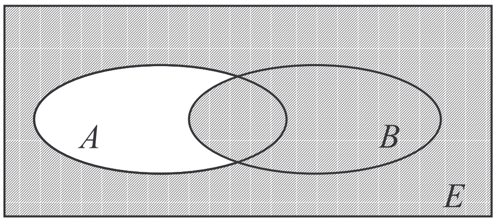
4.4.2. Définition de l'implication

Plaçons-nous dans un ensemble de référence E.

Soit A le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient la propriété A.

Soit B le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient la propriété B.

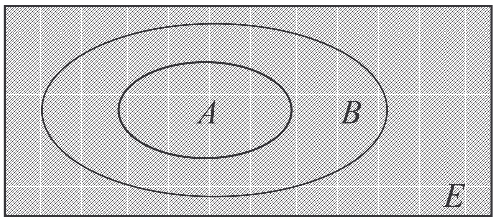
L'ensemble $A^c \cup B$ est l'ensemble comprenant tous les éléments de E exceptés ceux qui sont dans A sans être dans B. Cet ensemble est représenté par la zone hachurée ci-dessous.



C'est l'ensemble des éléments qui ne vérifient pas la propriété A à moins qu'ils ne vérifient la propriété B. C'est donc l'ensemble correspondant à la propriété (Non A ou B).

La zone hachurée ci-dessus représente tous les objets x de E pour lesquels l'implication est vraie. C'est-à-dire que ce schéma est associé à l'implication entre énoncés contingents $A(x) \Rightarrow B(x)$. L'implication est vérifiée pour tous les éléments qui ne sont pas dans A, c'est-à-dire pour lesquels la prémisse A(x) est fausse, et aussi par ceux qui appartiennent à B, c'est-à-dire pour lesquels la conclusion B(x) est fausse. L'implication est fausse uniquement pour les éléments qui sont dans A sans être dans B, c'est-à-dire tels que la prémisse A(x) est vraie alors que la conclusion B(x) est fausse.

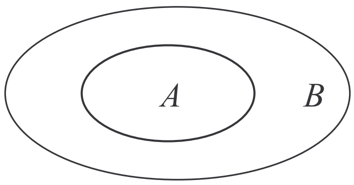
Étudions maintenant le cas particulier où l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, comme dans le schéma ci-dessous.



Dans ce cas, l'implication A(x) $\Rightarrow$ B(x) est vraie dans toute la partie hachurée. En effet, elle est vérifiée par tous les éléments de E puisqu'il n'existe pas d'éléments de E appartenant à A sans appartenir à B. Nous sommes alors dans le cas où l'implication entre énoncés contingents A(x) $\Rightarrow$ B(x) est vraie pour tous les éléments x de E, c'est-à-dire le cas où l'implication est universellement quantifiée. Le schéma précédent représente l'implication : $\forall x \in E$, A(x) $\Rightarrow$ B(x) est vrai.

L'inclusion d'un ensemble dans un autre peut donc être exprimée par une implication universellement quantifiée concernant les propriétés correspondantes.

La pratique mathématique scolaire ne représente l'implication que par ce dernier schéma d'inclusion. Cela montre que, comme nous le disions au paragraphe précédent, dans l'enseignement, les implications sont implicitement quantifiées universellement. En fait, la pratique scolaire cache encore davantage la quantification universelle de l'implication car le schéma proposé aux élèves ne représente pas toujours l'ensemble de référence :



Or, une implication universellement quantifiée dépend bien de l'ensemble de référence. L'implication *avoir 1 angle droit implique avoir 4 angles droits* est vraie dans l'ensemble des parallélogrammes, et est évidemment fausse dans l'ensemble des quadrilatères. Rendre implicite l'ensemble de référence contribue à cacher la quantification universelle en jeu.

4.4.3. Choix épistémologique

Lorsqu'on veut faire le lien entre le concept d'implication et le concept d'inclusion de la théorie des ensembles, il faut faire un choix épistémologique. Il faut choisir entre définir l'implication à partir du concept d'inclusion ou bien définir l'inclusion à partir du concept d'implication. Dans le premier cas la définition pourrait être :

> *Soit A et B des sous-ensembles de E.*
> *Soit* A *et* B *les propriétés définies respectivement par les ensembles A et B.*

> *On dit que tous les éléments de l' ensemble de référence E vérifient l'implication* A $\Rightarrow$ B *si l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B.*

Dans le second cas, la définition peut être par exemple :

> *Soit* A *et* B *des propriétés sur l'ensemble de référence E.*
> *Soit A et B les ensembles définis respectivement par les propriétés* A *et* B.
>
> *On dit que A est inclus dans B si l'implication* $\forall x \in$ E, $x \in A \Rightarrow x \in B$ *est vraie.*

L'implication issue de la logique naturelle n'a pas besoin de la théorie des ensembles pour être définie. Réciproquement, l'inclusion est un concept qui peut être défini intuitivement, comme la notion d'ensemble ou d'appartenance et qui n'a pas besoin du concept d'implication pour être défini. C'est donc bien un choix épistémologique qui doit être fait.

Nous faisons l'hypothèse que ce choix n'est pas sans conséquences et que définir l'implication à partir des ensembles favorise l'utilisation du cadre ensembliste, à condition de ne pas limiter la définition au schéma d'inclusion donné ci-dessus.

Le choix épistémologique fait par les manuels nous semble donc important et nous reviendrons dessus lors de l'analyse de la transposition du concept d'implication.

4.5. Condition nécessaire, condition suffisante, équivalence

Soit *A* (resp. *B*) l'ensemble dont les éléments vérifient la propriété A (resp. B).

On dit que A *est une condition suffisante pour* B et B *une condition nécessaire pour* A lorsque *A* est inclus dans *B*.

On dit que A (resp. B) est une *condition nécessaire et suffisante* pour B (resp. pour A), ou encore que A et B *sont équivalentes*, lorsque l'on a : $A \subset B$ et $B \subset A$, c'est-à-dire lorsque A et B sont associées au même ensemble ($A = B$).

4.6. Utilisation de l'implication du cadre ensembliste

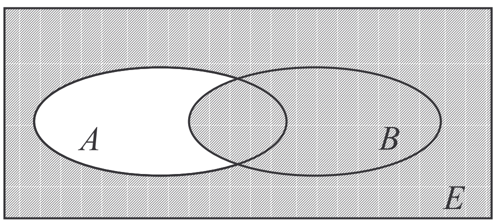
Le cadre ensembliste, contrairement au cadre logique, est peu pertinent pour traiter les implications entre propositions. Par exemple, la proposition *3 pair* est représentée par l'ensemble vide puisqu'elle est fausse et la proposition *4 pair* est représentée par l'ensemble de référence tout entier puisqu'elle est vraie. L' implication *3 pair implique 4 pair* est donc représentée par l'inclusion de l'ensemble vide dans l'univers. De même, l'implication *3 pair implique 4 impair* est représentée par l'inclusion de l'ensemble vide dans lui-même. Dans ce cas, travailler dans le cadre ensembliste n'apporte pas d'informations.

Ce cadre est plus adapté aux énoncés contingents puisque les ensembles permettent de représenter des propriétés qui ne sont vraies et n'ont de sens que pour certains objets de l'univers considéré. Il permet aussi de représenter des implications universellement quantifiées. Par exemple, l'implication *Tout carré est un rectangle* est vraie puisque l'ensemble des carrés est inclus dans l'ensemble des rectangles. Cependant, toutes les implications universellement quantifiées ne sont pas facilement représentables avec les ensembles, comme par exemple : $\forall$ k $\in$ N, k pair implique k+1 impair.

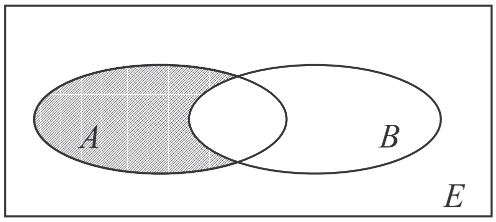
Pour étudier, avec le cadre ensembliste, la véracité de l'implication A(x) $\Rightarrow$ B(x) dans l'ensemble E, il faut se placer dans une classe d'objets U "la plus grande possible" incluse dans E, puis restreindre cette classe en utilisant les propriétés contenues dans l'hypothèse A, jusqu'à obtenir une classe plus petite dont on peut vérifier qu'elle est bien incluse dans la classe des objets qui ont la propriété B. Si l'ensemble U est égal à l'ensemble E, on a démontré l'implication universellement quantifiée : $\forall$ x $\in$ E, A(x) $\Rightarrow$ B(x). Si U est strictement inclus dans E il reste à évaluer la vérité de l'implication sur le complémentaire de U.

4.7. Négation de l'implication dans le cadre ensembliste

Rappelons le schéma ensembliste représentant l'implication entre énoncés contingents A(x) $\Rightarrow$ B(x) :



L'implication est vraie pour tous les éléments de E qui se trouvent dans l'ensemble représenté par la partie hachurée, c'est-à-dire dans $A^c \cup B$. Elle est donc fausse dans le complémentaire de cet ensemble que nous représentons hachuré ci-dessous :



L'implication est donc fausse pour les éléments de l'ensemble A qui ne sont pas dans l'ensemble B. En effet, d'après les lois de De Morgan sur les ensembles :

$$(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$$

Ce qui donne dans notre cas $(A^c \cup B)^c = A \cap B^c$

Ainsi, la négation de l'implication est vraie dans l'ensemble $A \cap B^c$.

La négation de l'implication A(x) $\Rightarrow$ B(x) se traduit pour les éléments de E par :

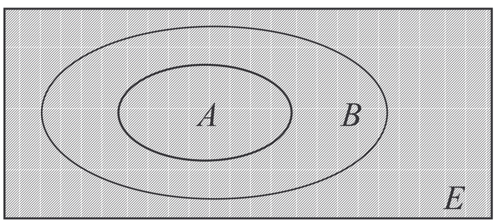
$$x \in A \cap B^c$$

ou encore

x vérifie A *et x ne vérifie pas* B

On retrouve alors la définition du contre-exemple donnée dans le cadre logique. Les éléments pour lesquels l'implication A(x) $\Rightarrow$ B(x) est fausse sont ceux qui vérifient la propriété A sans vérifier la propriété B.

Cependant, comme nous l'avons dit, la pratique scolaire donne uniquement la représentation de l'implication universellement quantifiée $\forall$ x $\in$ E, A(x) $\Rightarrow$ B(x), c'est-à-dire l'inclusion de A dans B :



Dans ce schéma, l'implication est vraie pour tous les éléments de E. Si, comme nous l'avons fait précédemment, nous voulons chercher la négation de l'implication en prenant le complémentaire de l'ensemble sur lequel elle est vraie, nous trouverons l'ensemble vide. En effet, il n'existe pas d'éléments de E qui vérifient la négation de l'implication.

Cependant, ce résultat ne prend pas beaucoup de sens et nous faisons l'hypothèse que cette unique représentation de l'implication, c'est-à-dire sous sa forme quantifiée, ne permet pas de décrire la négation de l'implication et qu'elle est un frein au bon maniement de l'implication. Nous développerons plus tard cette hypothèse.

5. Le cadre du raisonnement déductif

5.1. Présentation

Nous appelons *cadre du raisonnement déductif* toutes les propriétés, techniques, conceptions liées à l'élaboration d'un raisonnement déductif. Nous avons déjà expliqué pourquoi nous choisissions le mot *cadre* même s'il n'est pas utilisé ici dans le même sens que pour les autres cadres, c'est la première différence avec les autres cadres que nous avons présentés.

La seconde différence est que c'est, ici, l'utilisation de l'implication dans un raisonnement qui est en jeu et non pas la définition du concept. Cependant, dans l'enseignement secondaire où ce point de vue est le seul présent, il fait souvent office de définition pour l'implication.

Nous emploierons l'expression *implication dans le cadre déductif*, pour faire référence à l'utilisation de l'implication dans un raisonnement basé sur la règle du *Modus Ponens* :

A est vraie		*A(a) est vraie*
A implique B est vraie	ou	$\forall x \in E, A(x) \Rightarrow B(x)$
Donc B est vraie		*Donc B(a) est vraie*
où A et B sont des propositions		où A et B sont des prédicats

Nous utilisons le mot prédicat comme il est utilisé par l'équipe de l'IREM de Lyon :

> *Un prédicat désigne soit une propriété soit une relation. Les noms de propriété correspondent aux prédicats* unaires*, ou encore* monadiques*, c'est-à-dire qui s'appliquent à un seul objet. Par exemple* être pair *;* être premier *pour un nombre ;* avoir ses diagonales perpendiculaires *pour un quadrilatère, sont des prédicats unaires. Les noms de relation sont des prédicats* n-aires *avec n supérieur ou égal à 2, ou encore* polyadiques*, qui s'appliquent à plusieurs objets. Par exemple être inférieur à est un prédicat binaire, être compris entre...et...est un prédicat ternaire.*
> *[Durand-Guerrier V., Le Berre M., Pontille M-C., Reynaud-Feurly J., 2000, p7]*

La structure ternaire de ce raisonnement comprend une prémisse *A est vraie*, un énoncé tiers $A \Rightarrow B$ et une conclusion *B est vraie* à laquelle on aboutit par la *règle du détachement*. [Duval, 1993, p 44]. L'énoncé tiers doit être une proposition vraie : un théorème, une propriété, une définition, etc.

> *Un pas de déduction s'organise en fonction du* **statut opératoire**[18] *des propositions qu'il comporte nécessairement : prémisses et énoncé tiers. Ce statut ne dépend pas du* **contenu** *des propositions, de ce qu'elles énoncent et signifient, mais* **du statut théorique** *qui leur est préalablement fixé : hypothèses, théorème, définition, etc. Les prémisses ne peuvent être que des hypothèses données au départ ou des conclusions obtenues dans un pas antérieur. Les énoncés tiers ne peuvent être pris que dans un corpus déterminé de définitions et de théorèmes déjà construit théoriquement.*
> *[Duval, 1993, p 44]*

Le premier énoncé rend compte d'un point de vue propositionnel où la prémisse A est reconnue vraie. Le second met en jeu une implication universellement quantifiée. La valeur de vérité de l'énoncé contingent A(x) est examinée pour vérifier que A(a) est vraie.

De la même façon, nous considérons comme faisant partie du *cadre déductif* l'utilisation de l'implication dans un raisonnement basé sur la règle du *Modus Tollens* :

A implique B est vraie		$\forall x \in \mathrm{E}, A(x) \Rightarrow B(x)$
Or Non B est vraie	ou	*Or Non B(a) est vraie*
Donc Non A est vraie		*Donc Non A(a) est vraie*
Où A et B sont des propositions		Où A et B sont des prédicats

En mathématiques, ce raisonnement s'appelle *raisonnement par contraposition* pour le différencier du raisonnement précédent qu'on appelle parfois *raisonnement direct*.

Comme nous l'avons dit, l'implication dans le cadre déductif est sinon la seule proposée, au moins la plus présente dans l'activité mathématique scolaire.

5.2. Deux enjeux de vérité différents

Lorsque, au cours de l'activité mathématique, on est amené à utiliser des implications, deux types de tâche se distinguent, selon que l'on veut travailler sur la vérité de l'implication ou que l'on veut démontrer la vérité de la conclusion.

[18] Souligné dans le texte.

Dans le premier cas, la question est :

> *Pour quels objets x l'implication* A(x) ⇒ B(x) *est-elle vraie*[19] *? fausse ?*

Mais alors, en particulier si l'on travaille dans un cadre ensembliste, A et B ou plutôt les ensembles *A* et *B* correspondants ne sont pas fixés. On peut s'intéresser d'abord à une classe plus petite que *A* pour laquelle on a des informations. On pourra aussi s'intéresser à une classe *A'*, plus grande que *A,* pour voir si l'implication est partout vraie. Le résultat trouvé sera plus *fort*[20]. Il en est de même pour B, on arrive parfois à ne montrer qu'une partie de la propriété décrite dans la conclusion, c'est-à-dire qu'on démontre l'implication dans le cas d'un ensemble *B'* plus grand. Le résultat trouvé est plus *faible* que celui qu'on cherche. On peut aussi trouver un résultat plus *fort* en réduisant l'ensemble B de la conclusion.

A et B ne sont pas fixés a priori, on se pose des questions sur la taille des ensembles correspondants. On tâtonne et *A* et *B* varient. Dans ce cas-là, cela a un sens de regarder les cas où la prémisse ou la conclusion sont fausses, cela signifie qu'on agrandit les ensembles, soit pour obtenir un résultat plus *fort* dans le cas de l'ensemble *A*, soit pour obtenir un résultat plus *faible*, dans le cas de l'ensemble *B*.

Dans le second cas, la question porte uniquement sur la vérité de la conclusion B sous l' hypothèse A :

> *Sachant que je m'intéresse à des éléments vérifiant certaines hypothèses, et sachant que je connais certaines propriétés, la propriété* B *est elle vérifiée par ces éléments ?*

Ce qui peut aussi se traduire dans le cadre ensembliste par :

> *Sachant que je considère des éléments de l'ensemble A, et connaissant certaines inclusions entre des ensembles, ces éléments sont-ils dans l'ensemble B ?*

Cette dernière question est la plus présente dans l'enseignement, et c'est le plus souvent de cette façon-là qu'on travaille sur l'implication. Il n' y a, ici, pas d'intérêt à regarder le cas où la prémisse est fausse, on se place sous l'hypothèse A c'est-à-dire dans le cas où la prémisse est vraie.

D'autre part, le plus souvent, l'enjeu de vérité n'est pas le même dans ces deux types de tâche.

---

[19] Cette implication est vraie au moins pour les objets qui vérifient Non A(x), c'est-à-dire pour ceux qui ne sont pas dans l'ensemble *A*.

[20] Nous dirons que l'énoncé A1 ⇒ B est plus *fort* (on dit parfois plus *puissant*) que l'énoncé A2 ⇒ B si l'ensemble *A1* est plus grand, au sens de l'inclusion, que *A2*, c'est-à-dire lorsque la prémisse de l'implication est vraie pour un plus grand nombre d'éléments. Nous dirons aussi que l'énoncé A ⇒ B1 est plus fort que l'énoncé A ⇒ B2 si l'ensemble *B1* est plus petit, au sens de l'inclusion, que l'ensemble *B2*. Réciproquement nous dirons qu'un énoncé est plus faible lorsque l'ensemble *A1* est plus petit que *A2* ou lorsque l'ensemble *B2* est plus grand que l'ensemble *B1*.

Dans la première question, il y a réellement un enjeu de vérité, on cherche les éléments vérifiant une implication, on ne les connaît pas a priori. Au contraire, dans la seconde, il n' y a le plus souvent pas d'enjeu de vérité. En effet, dans, l'enseignement, la question se résume souvent à *Démontrez que B est vraie sous l'hypothèse A*, il ne s'agit plus de savoir si B est vrai ou non mais plutôt d'expliquer pourquoi B est vrai.

Cette distinction peut être mise en relation avec deux conceptions différentes sur la preuve. Soit que la preuve est le moyen d'établir ce qui est vrai, soit qu'elle est le moyen d'expliquer pourquoi une propriété est vraie. Conformément à ce que nous venons de dire sur l'implication, cette deuxième utilisation de la preuve est la plus répandue dans l'enseignement, la première utilisation apparaissant quelquefois lors de la recherche de conjectures.

5.3. La prédominance du cas où la prémisse est vraie

Pour l'utilisation de l'implication, le mathématicien (ou l'étudiant) s'intéresse principalement au cas où ***A est vrai***, ceci pour plusieurs raisons.

D'abord, s'il veut utiliser l'implication comme règle d'inférence, il part du fait que la prémisse est vraie. Il utilise ensuite l'implication réduite à la forme *Si A est vraie alors B est vraie*. Si la prémisse est fausse, il ne peut rien en conclure sur la vérité de la conclusion, connaître la vérité de l'implication dans ce cas-là est donc inutile.

De plus, s'il s'intéresse à une implication universellement quantifiée, pour montrer qu'elle est vraie, il n'a qu'à supposer que la prémisse est vraie pour essayer d'établir que la conclusion est vraie, puisque, dans le cas où la prémisse est fausse, la vérité de l'implication est établie.

Enfin, il peut se demander si l'implication à laquelle il s'intéresse est une équivalence. Il pourrait, alors, regarder si la conclusion est fausse lorsque la prémisse est fausse. Cependant, même dans ce cas-là, le mathématicien évite de s'intéresser au cas de la prémisse fausse, pour montrer que c'est une équivalence, il regarde si l'implication réciproque est vraie.

Pour exprimer les relations entre l'étudiant et le savoir, nous faisons appel maintenant au modèle de *théorème-en-acte* issu de la théorie des *champs conceptuels* de G. Vergnaud.

> *Appelons « schème » l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée. [...] On désigne par les expressions « concept-en-acte » et « théorème-en-acte » les connaissances contenues dans les schèmes : on peut aussi les désigner par l'expression plus globale d' « invariants opératoires ».*
> *[Vergnaud G., 1990, p.136et p.139]*

Un *théorème-en-acte* est donc une propriété ou une relation utilisée en situation de résolution de problème. Elle peut être implicite ou explicite, l'élève ne pouvant pas forcément ni l'expliquer ni la justifier. Nous utiliserons également parfois, le terme de *propriété-en-acte*, la différence avec le concept de théorème-en-acte étant la même que la différence qui peut être faite, en mathématique, entre les termes théorèmes et propriétés, cela nous permet de les hiérarchiser. Nous utiliserons, dans la suite, le concept de théorème-en-acte ou propriété-en-acte pour décrire des propriétés auxquelles les réponses ou les stratégies des élèves sont conformes.

A partir de notre analyse épistémologique et de nos préexpérimentations[21], nous sommes en mesure de faire des hypothèses sur l'émergence de certaines propriétés-en-acte. En particulier, nous faisons l'hypothèse que l'utilisation de l'implication dans l'unique cas où la prémisse est vraie, habituelle dans l'activité mathématique, amène chez les étudiants la propriété-en-acte suivante :

> *A implique B n'a pas d'intérêt lorsque A est fausse*

De là, peut découler une deuxième propriété-en-acte :

> *A implique B est fausse lorsque A est fausse*

Cette deuxième propriété-en-acte est une propriété fausse en mathématique comme nous l'avons montré lorsque nous avons construit l'objet implication. Cependant, ces propriétés-en-acte sont très proches de la logique naturelle et ne nuisent la plupart du temps pas à l'activité mathématique scolaire habituelle telle que nous l'avons décrite dans le paragraphe précédent. Elles sont donc très difficiles à déstabiliser.

5.4. Présence d'un lien causal entre prémisse et conclusion

Dans l'activité mathématique habituelle, les implications sont utilisées pour démontrer un résultat. On enchaîne des propriétés vraies, grâce à des implications, pour aller des hypothèses, vraies, vers la conclusion, vraie. Ces propriétés ont donc des *relations causales* entre elles *visibles*, au moins lorsqu'elles ne sont pas trop éloignées dans le cours du raisonnement.

Nous faisons l'hypothèse que cette utilisation de l'implication amène, chez les étudiants, la propriété-en-acte suivante, que nous appellerons *théorème-en-acte de causalité :*

> *A implique B n'a de raison d'être, et a fortiori ne peut être vraie, que lorsque A et B ont un lien de cause à effet entre elles.*

[21] Ces préexpérimentations seront présentées dans un prochain chapitre.

En réalité, il ne faut pas considérer l'expression *lien de cause à effet* au sens strict. En effet, en mathématique, on ne peut pas parler de cause ou d'effet. La propriété-en-acte se traduit alors par le fait que la prémisse et la conclusion ne doivent pas être *étrangères* l'une à l'autre, qu'il doit exister une *explication*, un *cheminement* pour passer de l'une à l'autre.

Ce théorème-en-acte de causalité peut, par exemple, amener à répondre :

> *On ne peut pas parler d'implication entre deux propositions dès lors qu'il n'y a pas de lien de cause à effet visible entre elles. (resp. dès lors qu'il n'y a pas de cheminement explicatif possible pour aller de l'une à l'autre)*
>
> *L'implication, A implique B, est fausse puisque A n'est pas la cause de B (resp. puisqu'il n'y a pas de cheminement explicatif menant de A à B).*

Ce théorème-en-acte est faux en mathématique où la vérifonctionnalité est une convention. Cependant, ici encore, ce théorème-en-acte est très proche de la logique naturelle et il est renforcé par certaines expressions langagières associées à l'implication. En effet, les expressions *A implique B*, *A entraîne B*, *A donne B*, *B résulte de A*, par exemple, laissent penser qu'il y a bien un lien de cause à effet entre l'hypothèse et la conclusion d'une implication.

Pour faire référence à ce théorème-en-acte et aux réponses qui lui sont associées nous utiliserons, dans la suite, le terme de *conception causale*. Il nous semble nécessaire de définir le modèle *conception* que nous utiliserons au sens de G. Brousseau.

> *[une conception est] un ensemble de règles, de pratiques, de savoirs qui permettent de résoudre une classe de situation et de problèmes de façon à peu près satisfaisante, alors qu'il existe une autre classe de situations où cette conception échoue, soit qu'elle suggère des réponses fausses, soit que les résultats sont obtenus difficilement et dans des conditions défavorables.*
> *[G. Brousseau, 1986]*

Cette conception causale de l'implication induit très souvent un ordre chronologique entre la prémisse et la conclusion. En effet, dans le monde physique la cause précède la conséquence. Cela conduit à la propriété-en-acte :

> *Lorsque A implique B, A doit être vérifiée avant B (A se situe dans le temps avant B)*

Nous appellerons dans la suite *conception temporelle* de l'implication, la conception associée à cette propriété-en-acte. Cette conception entraîne des difficultés dans l'utilisation de l'implication :

Il est difficile d'admettre l'équivalence mathématique entre :

> A implique B*, où A doit précéder B*

et

(Non B) implique (Non A)*, où Non B doit précéder Non A*

Il est difficile d'admettre, d'autre part, que lorsque *A implique* B est vraie, B est alors une condition nécessaire pour A, ce qui semble sous-entendre qu'elle doit être remplie avant A.

Il est difficile d'admettre, enfin, que la négation de l'implication est *A et NonB*, ce qui élimine toute notion chronologique, et même de causalité, entre A et B, et non pas plutôt une autre implication.

Ces deux conceptions, causales et temporelle, issues de la logique naturelle, sont étroitement liées. Leur *domaine de validité* dans la pratique des mathématiques, c'est-à-dire l'ensemble des situations problèmes mathématiques qu'elles permettent de résoudre, est étendu, au moins pour la première, ce qui les rend très difficiles à déstabiliser.

Nous faisons pourtant l'hypothèse que toutes les propriétés-en-acte que nous venons de décrire sont source de difficultés et même d'erreurs dans le maniement de l'implication mathématique et nous le montrerons dans un prochain chapitre.

6. Relations entre les différents cadres

6.1. Passage d'un cadre à l'autre

Les définitions et la signification de l'implication dans ces différents cadres sont évidemment reliées entre elles.

En définissant les outils ensemblistes par analogie avec les outils logiques, nous avons montré, comment sont liées la définition dans le cadre ensembliste et la définition dans le cadre logique. Néanmoins, il y a un risque de confusion entre deux symboles appartenant respectivement aux deux cadres. Comme nous l'avons présenté, la logique formelle utilise parfois le symbole :

$$A \supset B$$

pour exprimer l'implication :

$$A \Rightarrow B$$

qui peut, sous certaines conditions, s'écrire d'autre part dans le cadre ensembliste :

$A \subset B$

Ces deux écritures sont contradictoires. Il semble que les deux concepts, *inclusion* dans le cadre ensembliste d'une part, *implication* dans le cadre logique d'autre part, aient été construits sans liens entre les deux cadres, sans quoi les symboles auraient probablement été choisis différemment.

Nous nous questionnons sur la place de ces deux symboles lors de la transposition du concept d'implication dans les manuels. Il s'agit de savoir si les manuels présentent les deux symboles, s'ils proposent une explication ou bien si cela est laissé à la charge de l'élève. Nous répondrons à cette question dans le chapitre suivant.

Le raisonnement déductif, quant à lui, utilise essentiellement les propriétés suivantes de la logique formelle :

- *A implique B* est fausse lorsque A est vraie et B est fausse
- *A implique B* est vraie lorsque A et B sont vraies, avec cependant la nécessité d'une relation de causalité entre A et B
- la contraposée de l'implication est équivalente à l'implication elle-même

L'utilisation de l'implication dans cadre ensembliste est plus proche de l'activité de recherche et de validations de conjecture que du raisonnement déductif.

Enfin, l'utilisation d'un contre-exemple pour invalider une implication fait à la fois partie du cadre déductif, du cadre ensembliste, et même du cadre logique pour les énoncés universellement quantifiés, c'est ce que nous allons développer ci-dessous.

6.2. Quantificateurs et contre-exemples

Comme nous l'avons déjà montré, les quantificateurs appartiennent à la fois au cadre ensembliste et au cadre logique et se retrouvent dans le cadre déductif. Pour éclairer ces liens, nous résumons ici quelques éléments donnés dans les précédents paragraphes.

Dans le cadre ensembliste, lorsque l'on a une inclusion d'ensembles $A \subset B$, cela signifie que tous les objets de A sont aussi des objets de B, c'est-à-dire que l'implication universellement quantifiée $\forall x \in E, A(x) \Rightarrow B(x)$ est vraie, où A et B sont les ensembles définis par les propriétés A et B et où E est un ensemble de référence dans lequel A et B sont inclus.

Pour démontrer que cette implication est fausse, on cherche un élément x de E tel que la négation de l'implication soit vraie, c'est-à-dire un élément qui appartienne à l'ensemble $A \cap B^c$. Cet élément vérifie la propriété A mais pas la propriété B, on l'appelle un *contre-exemple*.

Dans le cadre de la logique formelle, nous avons vu les quantificateurs dans la *théorie des phrases ouvertes*. Lorsque, pour chaque élément x de E, l'implication entre énoncés contingents A(x) $\Rightarrow$ B(x) est vraie, on écrit $\forall$ x $\in$ E, A(x) $\Rightarrow$ B(x) est vraie.

Pour démontrer que cette implication universellement quantifiée est fausse, on cherche un élément x de E pour lequel l'implication entre énoncés contingents A(x) $\Rightarrow$ B(x) est fausse. Ainsi, on cherche un élément de E qui vérifie la propriété (A et Non B) ou encore un élément de E qui vérifie la propriété A sans vérifier la propriété B. On cherche donc un *contre-exemple* selon la définition données ci-dessus.

Enfin, le cadre déductif propose un raisonnement avec une implication quantifiée :

> *A(a) est vraie,*
> $\forall x \in$ E, $A(x) \Rightarrow B(x)$,
> *donc B(a) est vraie.*

Rappelons que c'est ce schéma déductif qui est le plus souvent utilisé dans l'enseignement secondaire, même si la quantification universelle est très souvent implicite. De la même manière pour montrer que l'implication $\forall$ x $\in$ E, A(x) $\Rightarrow$ B(x) est fausse, on exhibe un contre-exemple, c'est-à-dire un élément qui vérifie l'hypothèse A sans vérifier la conclusion B.

6.3. Apports des différents cadres pour le concept d'implication

En simplifiant volontairement, nous pouvons déjà décrire ce que peuvent apporter les différents cadres dans l'utilisation de l'implication.

Le cadre ensembliste paraît le plus approprié à la partie découverte et recherche de la preuve. En permettant de *naviguer* d'un ensemble à l'autre il permet de rendre la conjecture de départ plus *forte* ou au contraire plus *faible*. Il amène à tester différents objets pour définir l'ensemble adéquat. Il facilite parfois la preuve quand prendre un ensemble de départ A plus grand, au sens de l'inclusion, permet d'utiliser des propriétés plus fortes.

Le cadre déductif est très utilisé dans la pratique usuelle des mathématiques, particulièrement en classe. Il permet, entre autres, d'écrire des preuves sous une forme reconnue et acceptée par la communauté actuelle des mathématiciens. Sa structure ternaire rigide permet un contrôle pas à pas de toutes les inférences. Toutefois, certains reprochent à cette même structure d'empêcher d'embrasser et donc de comprendre l'ensemble de la démarche de la démonstration.

Enfin, le cadre logique peut être utilisé, à certains moments, comme structure de contrôle. Il permet de débarrasser le problème mathématique de la sémantique, dans des phrases complexes par exemple ou pour trouver leur négation... Certaines phrases, notamment avec plusieurs quantificateurs, sont parfois plus faciles à nier en utilisant les règles connues sur les connecteurs plutôt qu'en se fiant au sens de la phrase. Parce qu'il ignore la sémantique, il permet, dans certains raisonnements, de remettre en question le sens ($\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$) des implications sur lesquelles on travaille, de savoir si l'on doit chercher des conditions suffisantes ou nécessaires.

7. Différents types de tâches problématisant l'implication

Nous analysons dans cette partie plusieurs types de tâche concernant l'implication. Nous recherchons un type qui permettrait de problématiser l'implication, c'est-à-dire de questionner aussi bien l'hypothèse, la conclusion, la condition nécessaire, la condition suffisante... Nous montrons comment chacun des types de tâche présenté répond en partie ou non à cette attente.

7.1. A $\Rightarrow$ B où A et B sont connus

La question de démontrer A $\Rightarrow$ B où A et B sont connus est habituelle dans l'enseignement des mathématiques. Pour répondre au problème, on met alors en oeuvre un raisonnement déductif dans lequel on ne considère que le cas où A est vrai. La plupart du temps, comme nous l'avons vu, il n'y a même pas d'enjeu de vérité, la question porte sur *l'explication* et non pas sur la *preuve de la vérité*. Le travail consiste à déterminer les bonnes propriétés ou théorèmes qui serviront *d'énoncé tiers* [Duval, 1993, p. 44] pour aller de A à B.

7.2. Dans H, A $\Rightarrow$ B où A et B sont connus

Cette précédente implication prend place d'ordinaire dans une classe d'objets déterminée *H*, par exemple les quadrilatères, les parallélogrammes, les nombres naturels...

On regarde en fait l'implication

Dans H, A ⇒ B

Mais, dans l'enseignement, *H* est le plus souvent implicite puisque la classe d'objets dans laquelle on se place est en général très institutionnalisée, c'est-à-dire bien connue ainsi que toutes ses propriétés par les élèves. En effet, si l'implication se place dans la classe des parallélogrammes, pour résoudre le problème on utilise implicitement des propriétés des parallélogrammes (par exemple, la convexité), sans pour autant rendre cette restriction explicite.

La problématisation de l'implication est mieux réalisée dans le cas où *H* ne représente pas une classe d'objets institutionnalisée, comme par exemple la classe des quadrilatères dont *une des diagonales coupe l'autre en son milieu*. La propriété H qui lui est associée doit alors être présente explicitement au cours de la résolution.

Nous faisons l'hypothèse que l'obligation de rester à l'intérieur d'un ensemble, au cours de la résolution, favorise l'utilisation du cadre ensembliste en la rendant plus économique.

7.3. Dans H, (A ?) ⇒ B

Dans l'enseignement, A et B sont le plus souvent connus, et lorsque l'on émet des conjectures, on se place, le plus souvent, dans le schéma où l'on connaît H et A mais pas B :

Dans H, A ⇒ (B ?)

Lorsque la question porte sur A, c'est-à-dire sur la recherche d'une condition suffisante A pour B dans *H*, on est alors dans le schéma :

Dans H, (A ?) ⇒ B

La question devient *quelle est la propriété A qu'il suffit que les objets de la classe H vérifient pour qu'ils vérifient aussi la propriété B ?*. Ce type de tâche entrave l'utilisation du cadre du raisonnement déductif puisque l'on ne connaît pas la propriété de départ.

7.4. Dans H, (A_1 ou A_2) ⇒ B

Dans l'enseignement, la prémisse A est le plus souvent de la forme (A_1 et A_2 et...). Les hypothèses *s'ajoutent*. Dans le cadre ensembliste, cela revient à dire que l'ensemble de départ est une intersection d'ensembles.

Lorsque la prémisse A peut être écrite sous la forme (A_1 ou A_2), les enseignants préfèrent parfois écrire dans le cours deux propriétés distinctes, l'une avec la prémisse A_1, l'autre avec A_2. Cela revient pourtant à affaiblir la portée de chacune des implications données.

Si A est de la forme (A_1 ou A_2), il faut alors contrôler les propriétés vérifiées par l'élément x que l'on considère, suivant que x est dans A_1 ou bien dans A_2, des allers-retours entre les deux ensembles étant nécessaires. Nous faisons l'hypothèse que ce type de tâche favorise l'utilisation du cadre ensembliste. Toutefois, selon le choix des ensembles A_1 et A_2, l'utilisation d'un raisonnement par disjonction des cas peut ramener facilement au cadre déductif.

7.5. Dans H, A ? B

Le sens (⇒ ou ⇐) de l'implication n'est pas précisé. Un travail doit être fait à la fois sur les conditions suffisantes et nécessaires. La vérité de l'implication est problématisée, A est-elle une condition suffisante et si oui pourquoi, B est-elle une condition nécessaire et si oui pourquoi ?

Passer de l'ensemble *A* à l'ensemble *B* sans arrêt, jusqu'à connaître toutes les relations entre ces deux ensembles permet de résoudre le problème en ayant une vue globale sur lui. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que le cadre ensembliste est ici un outil performant.