Chapitre 2

Étude de la transposition de l'implication dans des manuels, du collège à l'université

Nous nous intéressons dans cette partie à la *transposition* du concept d'implication dans l'enseignement des mathématiques, c'est-à-dire à la place de l'objet implication et à ses liens avec les autres objets à l'intérieur de cette institution. L'implication étant un concept appartenant à d'autres disciplines telles que la physique ou la philosophie, sa place dans les mathématiques est inhabituelle. L'implication, objet de la logique, semble néanmoins apparaître le plus souvent, dans l'enseignement des mathématiques, comme un outil « paramathématique ». Issu de la logique naturelle, ce concept est peu enseigné, néanmoins l'outil est omniprésent. Pour cette recherche, nous avons étudié sa place dans les manuels de mathématiques, reprenant à notre compte la position adoptée par D. Menssouri :

> *Les manuels constituent aussi une réalisation effective et "objectivée" des enseignements donnés en classe. Réalisation soumise au regard et au jugement public, et qui se veut représentative de la réalité de la classe. [Menssouri, 1994]*

Pour cette étude, nous avons adopté le questionnement de *l'approche écologique* développée dans le cadre de *la théorie anthropologique des savoirs* par Y.Chevallard [Chevallard, 1992]. Cette théorie, en définissant, en particulier, l'habitat et la niche écologique d'un objet, nous apporte des outils permettant de répondre à nos questions sur la *vie* de l'objet implication.

> *Pour le dire en langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche ce sont les fonctions que l'organisme y remplit : c'est en quelque façon la*

> *profession qu'il y exerce.*
> *[Chevallard, 1994]*

La place de l'objet implication est aussi à prendre en compte dans les relations qu'il exerce avec d'autres objets mathématiques. Sa *vie* dans le savoir enseigné est dépendante de ces relations.

> *Pour être viable au sein d'un corpus de savoirs (savant ou enseigné), un élément doit pouvoir y apparaître [...] comme partie d'un tout structuré.*
> *[Rajoson, 1988]*

La perspective écologique nous semble pertinente car, comme nous l'avons dit, du fait de sa nature, le statut de l'objet implication est particulier, ce qui devrait avoir des répercussions sur sa *vie* dans l'enseignement des mathématiques. Ceci nous amène à formuler les hypothèses suivantes :

Parce qu'elle est omniprésente dans l'activité mathématique comme outil, l'implication n'a pas un habitat bien identifié dans les manuels, elle n'est pas rattachée à un domaine précis. Au contraire, lorsqu'un habitat lui est attribué, celui-ci est restreint et l'objet est isolé dans cet habitat : pas ou peu de liens sont faits avec d'autres concepts.

Pour ces mêmes raisons, l'approche écologique sera, toutefois, probablement difficile. Une grande « exploration » sera nécessaire puisque l'habitat n'est pas fixe.

Enfin, pour repérer, dans les manuels, la présence du concept d'implication, objet non ostensif, nous rechercherons les objets ostensifs qui lui sont rattachés. Les objets ostensifs, outils issus de la théorie anthropologique des savoirs, sont définis par M. Bosch et Y. Chevallard.

> *Les objets non ostensifs sont alors tous ces "objets" qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours).*
> *[Bosch, Chevallard,1999]*

Nous nous intéressons, dans cette étude, aux ostensifs écrits. Ils participent de manière essentielle à la construction de connaissances, chacun pouvant être vu comme « un instrument possible de l'activité, *donc partie intégrante de techniques permettant d'accomplir certaines tâches* » [Bosch, Chevallard,1999]. Cela montre combien l'étude des différents ostensifs, des liens entre eux, des choix que font les manuels dans leurs utilisations, peut apporter d'informations sur la *vie* de l'objet implication en tant que concept ou en tant qu'outil.

Pour cette étude de la *vie* du concept d'implication dans l'enseignement**,** nous avons choisi d'analyser des manuels à trois niveaux très différents : quatrième, seconde et DEUG scientifique. Ce choix peut paraître arbitraire néanmoins, outre le fait qu'il permet de recouvrir trois cycles d'enseignement, il a été motivé par plusieurs raisons.

Premièrement, c'est, selon de nombreux professeurs, en classe de quatrième que débute l'apprentissage de la démonstration, nous attendions donc, à ce niveau, une place privilégiée pour certains aspects du concept d'implication. D'autre part, les premières années d'études universitaires permettent de donner une signification plus formalisée à l'implication notamment à l'aide de l'introduction de la logique. Enfin, les programmes 2000 ont permis à l'implication de réapparaître dans les manuels de seconde comme objet d'enseignement.

Nous avons choisi des manuels pour lesquels l'objet implication ou l'objet équivalence étaient présents dans la table des matières ou l'index (sous la forme *implication, implique, inférence, si...alors...,* $\Rightarrow$*, équivalence, condition nécessaire, condition suffisante, nécessaire, suffisant, réciproque*). Cela nous a permis de repérer les ouvrages dans lesquels l'implication était un objet d'enseignement explicite, et donc de nous intéresser à des formulations explicites de l'implication plus faciles à traiter. Un premier constat est que nous n'avons pas pu étudier des manuels de quatrième récents : ces termes ne figurent pas dans l'index des manuels des années 90 que nous avons considérés.

Dans cette partie, nous voulons étudier la *vie* de l'objet implication dans les institutions « manuels de quatrième », « manuels de seconde » et « manuels de DEUG scientifique ». Nous cherchons à préciser l'*habitat* et la *niche écologique* de ce concept en essayant de distinguer les différents *ostensifs* qui lui sont associés :

- Quel est le lieu où il apparaît dans ces institutions ?
- Quelle(s) définition(s) pour cet objet ?
- À quelle(s) fin(s) est-il introduit ? À quoi doit-il servir ?
- Avec quels objets est-il en rapport ?
- Sous quelle(s) forme(s) vit-il ? Quel symbolisme, quel vocabulaire ?

1. Remarque préliminaire

Certains manuels n'utilisent pas le mot *implication*, différents ostensifs sont alors employés soit à la place de celui-ci, soit en lien avec celui-ci, par exemple :

Dans les manuels de quatrième :

"inférence" (B-4ème)

"si...alors...", "réciproque", "équivalence " (N-4ème) (AC-4ème)

"réciproque", "équivalence", "condition nécessaire", "condition suffisante" (H-4ème)

dans les manuels de seconde :

"si...alors..." (P-2nde) (PM-2nde)

dans les manuels de DEUG :

"$\Rightarrow$" (Le-Deug) (P-Deug)

2. Quel habitat pour l'objet implication ?

L'habitat de l'implication dans les manuels de collège et lycée n'est pas fixe. L'implication se trouve le plus souvent dans un chapitre consacré à un autre enseignement ou parfois dans des fiches d'aide. En revanche, dans les manuels de DEUG l'habitat est mieux délimité, en particulier on ne trouve l'implication que dans des ouvrages d'algèbre. L'implication est présente dans trois types de chapitres suivant l'usage que veut en faire le manuel : théorie des ensembles, logique formelle ou raisonnements mathématiques. Ces trois types de chapitre sont évidemment associés aux trois cadres que nous avons choisi de distinguer pour notre étude épistémologique de l'implication. Cet habitat dans les manuels justifie donc a posteriori le choix que nous avions pressenti pertinent a priori. Enfin, quels que soit le manuel, l'habitat de l'implication est isolé. En effet, l'implication, lorsqu'elle est présentée dans un chapitre n'apparaît plus dans les suivants. Il n'y a pas de "continuité", en tout cas explicite, dans la présence de ce concept dans le manuel. Ajoutant un habitat "mobile" à ceux présents dans les manuels de DEUG, nous avons répertorié quatre catégories d'habitats :

2.1. Dans un chapitre de logique uniquement

quatrième :	2/5	seconde :	0/7	DEUG :	3/9

Les titres sont :

Notions de logique (I-4ème)

Le langage de la logique (B-4ème)

Éléments de logique (FU-Deug)

Un peu de logique (P-Deug)

Rudiments de logique (L-Deug)

Ces chapitres traitent l'implication en tant qu'objet de la logique formelle. Ces manuels relient, de façon plus ou moins approfondie, l'implication à la théorie des ensembles (cf. § *Dans quel objectif l'objet implication est-il introduit ?*).

(L-Deug) se distingue un peu du groupe puisqu'il propose une approche logique de l'implication, mais ceci dans le but de faciliter les raisonnements et non pas comme simple objet de la logique formelle.

2.2. Dans un chapitre de théorie des ensembles uniquement

quatrième :	0/5	seconde :	0/7	DEUG :	4/9

Les titres des chapitres sont :

Vocabulaire de théorie des ensembles (LFA-Deug, AF-Deug, C-Deug)

Ensembles Relations Lois de composition (ROD-Deug)

L'implication est définie dans le premier chapitre du premier tome et n'apparaît plus explicitement après, cependant elle sera utilisée pour définir des propriétés des ensembles (LFA-Deug, ROD-Deug, AF-Deug, C-Deug).

2.3. Dans un chapitre ou une fiche sur le raisonnement uniquement

quatrième :	1/5	seconde :	4/7	DEUG :	2/9

Certains de ces manuels utilisent le terme *logique* mais puisque, ici aussi, la définition et l'utilisation de l'implication sont faites dans le cadre du raisonnement et de la démonstration, leur place dans cette catégorie nous paraît plus adéquate que dans la catégorie *chapitre de logique*.

Deux fiches techniques (*propriétés réciproques, propriétés caractéristiques*) présentent un petit texte théorique suivi d'exercices d'applications, elles font partie d'une série intitulée : *pour justifier et raisonner* (N-4$^{\text{ème}}$)

Des chapitres ou paragraphes présentent l'implication en lien direct avec la démonstration :

Le vocabulaire de la logique (T-2$^{\text{nde}}$)

Comment chercher en géométrie (I-2$^{\text{nde}}$)

Propriété et réciproque et démontrer (F-2nde)

Une approche formelle simplifiée de l'implication est donnée en début de manuel pour permettre son utilisation dans les raisonnements mathématiques.

S'exprimer en mathématiques (premier chapitre, LM-Deug)

Vocabulaire de logique (premier paragraphe, Le-Deug)

2.4. À l'intérieur d'un cours

quatrième :	2/5	seconde :	2/7	DEUG :	0/9

L'implication est traitée à l'aide d'exemples (activité d'entretien : *réciproques ; "nécessaire" ; "suffisant"* (H-4ème) ; *exemple de démonstration* (AC-4ème)), à l'intérieur d'un chapitre de géométrie (H-4ème) ou d'un chapitre sur l'addition des nombres décimaux (AC-4ème).

Un encart dans la marge du chapitre *ordre et inégalités* (B-2nde) ou un paragraphe entier dans le chapitre *égalités – équations - raisonnement* (D-2nde) donnent une définition succincte de l'implication en rapport avec les exemples du cours.

3. Quelle(s) définition(s) pour l'objet implication ?

Les manuels donnent une définition de l'implication parfois simplement **descriptive**, parfois en rapport avec la **logique formelle,** parfois en rapport avec le **raisonnement déductif** mais **très rarement en rapport avec les ensembles**. Les définitions des manuels de DEUG sont beaucoup plus explicites et complètes que la plupart de celles des manuels de quatrième et seconde : il ne s'agit plus, en DEUG, d'introduire l'implication, mais de donner une définition plus formelle ou encore un nouveau point de vue sur un objet que les étudiants utilisent déjà.

3.1. Définitions réduites à une description

Dans ces exemples, l'implication mathématique est complètement assimilée à l'objet de la logique naturelle. Il ne s'agit pas de décrire un nouvel objet mathématique mais de montrer des exemples de l'utilisation d'un objet naturel en mathématiques. Les expressions *si…alors*, *entraîne*, *implique*…sont supposées claire, connues et comprises. Les mots pour nommer A et B dans A ⇒ B sont variés : *hypothèse*, *conclusion*, *donnée*, *propriété* [ce dernier uniquement dans le manuel (P-2nde)], mais le mot *propriété* est dans la plupart des exemples utilisé pour nommer l'implication A ⇒ B elle-même. Ce changement dans le statut du mot *propriété* peut évidemment porter à confusion. Pour nommer l'implication A ⇒ B, les manuels utilisent aussi des expressions variées : *énoncés, phrase, propriété, implication, expression, affirmation.* Toutes ces expressions sont utilisées comme synonymes, aucune n'étant définie.

(N-4ème)

> En mathématiques, la plupart des énoncés peuvent s'écrire sous la forme si...alors... À partir d'une phrase écrite sous la forme "si...alors..." il est possible d'écrire une nouvelle phrase en intervertissant hypothèse et conclusion.
> [Suivent des exercices :]
> Ecris chacune des propriétés suivantes sous la forme "si... alors" ", "Ecris une réciproque de chacune de ces propriétés, sont-elles vraies ou fausses ?
> [On peut alors définir l'équivalence :]
> Il se peut qu'une propriété soit vraie en même temps que sa propriété réciproque. On dit alors que les deux propriétés sont équivalentes.

Dans ce premier exemple, le statut donné au mot *propriété* est confus et cela a une conséquence sur la compréhension de la définition de l'équivalence. En effet, dans toute la première partie du texte, *propriété* est utilisé pour *implication* mais à la dernière phrase le sens change.

> Il se peut qu'une propriété soit vraie en même temps que sa propriété réciproque.

Dans la définition de l'équivalence, il paraît clair que le mot *propriété* est bien utilisé ici au sens de *implication* comme précédemment, mais dans la phrase qui suit il semble de même être clair que c'est une autre acception du mot qui est alors choisie.

> On dit alors que les deux propriétés sont équivalentes.

D'après la définition de l'équivalence, le mot *propriété* semble bien renvoyer ici à l'hypothèse A et à la conclusion B et non pas aux implications, c'est-à-dire que l'équivalence semble être entre A et B et non pas entre A ⇒ B et B ⇒ A. En fait, logiquement parlant, les équivalences A ⇔ B et (A ⇒ B) ⇔ (B ⇒ A) sont les mêmes, elles sont toutes les deux vraies lorsque A et B sont simultanément vraies et lorsque A et B sont simultanément fausses. Il n'en reste pas moins que l'équivalence est habituellement définie entre A et B et qu'il semble que ce soit ce que les auteurs du manuel ont voulu définir sans se rendre compte du changement de statut du mot *propriété*.

(AC-4ème)

> [un exemple pour "définir" l'équivalence, on donne une propriété A : "*a,b,m dans D si (a=b) alors (a+m=b+m)* " (admise), puis un exemple de la démonstration de la propriété B : "Si (a+m=b+m) alors (a=b)", pour aboutir à la conclusion :]
> -Chaque étape a été justifiée, la propriété B est démontrée.
> -B est la réciproque de A.
> -Les propriétés A et B étant toutes deux établies on a une équivalence.
> -a, b, m dans D (a=b) équivaut à (a+m=b+m).

Les manuels de seconde sont particulièrement nombreux dans cette catégorie et leurs définitions sont particulièrement dépourvue de sens. Il faut les remettre dans le contexte des programmes de l'époque, le concept d'implication, banni des programmes depuis quelques années, retrouve une place dans les manuels de seconde 2000 aucun cours de logique formelle n'étant autorisé. Les manuels ont donc la difficile tâche de faire « revivre » un concept, mais ceci sans pouvoir le placer dans la niche « logique », ils se rattachent donc à la logique naturelle pour définir ce concept mathématique.

(F-2nde)

> Une propriété mathématique est une affirmation toujours vraie. Une propriété s'écrit souvent de la façon suivante :
> Si............(Hypothèse de la propriété), alors........(Conclusion de la propriété)
> On dit que l'on a une implication.

Dans cet exemple encore, *propriété* est utilisé pour *implication*. Mais ici, l'information de la vérité est rajoutée. Pour ce manuel, quelle qu'elle soit, une implication est toujours vraie, sa vérité n'est pas questionnée. Ceci vient-il du fait que, pour le manuel, les seules implications présentées à l'élève sont celles des théorèmes du cours ? Mais alors quel enjeu de vérité peut-il y avoir dans les problèmes ? Cette question se pose d'autant plus lorsque l'on lit la suite du cours :

(F-2nde)

> Pour obtenir l'énoncé réciproque d'une propriété, on inverse la conclusion et les hypothèses de cette propriété.

L'énoncé réciproque d'une propriété est-il une propriété ? A priori, il semble que oui, d'autant plus que cette réciproque s'écrit sous la forme *Si…Alors…* Mais alors la réciproque doit être vraie puisqu'une propriété mathématique est toujours vraie d'après la première phrase ! Deux pages plus tard, le manuel confirme le choix qu'il a fait pour le mot propriété :

(F-2nde)

> L'énoncé réciproque n'est pas toujours vrai mathématiquement, ce n'est pas toujours une propriété.

Une *propriété* est donc toujours vraie pour ce manuel. Il en résulte que, bien qu'ayant la même formulation en *Si…Alors…*qu'une propriété, la réciproque d'une propriété n'est pas une propriété. Non seulement ce choix peut paraître discutable pour les raisons que nous avons évoquées mais il aura fallu, de plus, que l'élève attende deux pages pour avoir la confirmation qu'une réciproque n'est pas forcément une propriété, ce qui ne paraissait pas évident a priori.

(B-2nde)

> P et Q étant deux énoncés, les deux expressions suivantes sont synonymes :
> Si P alors Q
> P implique Q

(D-2nde)

> Une *implication* est une phrase mathématique indiquant qu'une donnée (1) entraîne (ou *implique*) une conclusion (2).

(P-2^{nde})

Si...alors : tournure "standard" qui tend à expliquer que si une propriété est satisfaite, on peut en déduire qu'une seconde l'est également.

Ce manuel ne prend pas de risques dans sa définition, *tend à expliquer* est particulièrement neutre et sa signification particulièrement vague. Le verbe *déduire* est évidemment utilisé ici avec son sens dans la logique naturelle et reste très confus.

(I- 2^{nde})

La phrase "si A alors B" est une implication. On note A ⇒ B et on lit "A implique B" ou "A donc B".

Nous voyons ici, pour la première fois, l'identité linguistique donnée aux mots *implique* et *donc*. Or, lorsque l'on revient au raisonnement déductif et au Modus Ponens :

A vrai ; A implique B vrai, donc B vrai

les rôles de *implique* et *donc* sont différents. Le mot *donc* symbolise l'action mentale qui permet d'inférer[22] une conclusion. Le Petit Larousse 2003 propose la définition suivante :

Donc : Introduit la conclusion d'un raisonnement, la conséquence de la proposition avancée.
[Le Petit Larousse, 2003]

Alors que A ⇒ B ne dit rien sur la vérité de A et B, le mot *donc* connote la vérité de A et de B. Il s'ensuit que l'expression *A donc* B ne rend compte que du cas où A et B sont vrais dans l'implication A ⇒ B, c'est-à-dire que *A donc B* pourrait aussi se traduire par *A vrai implique B vrai*. Cet « écrasement » de l'implication sur les seuls cas où A et B sont simultanément vrais est assez courant dans les manuels. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'on ne peut utiliser une implication que lorsque A est vrai, c'est donc bien le cas A vrai ⇒B vrai qui nous intéresse alors. De plus, pour montrer qu'une implication est vraie il suffit de vérifier que lorsque A est vrai, B est vrai aussi, puisque lorsque A est faux l'implication est vraie de toutes façons. Ces raisons font que, comme nous allons le montrer, certains manuels « écrasent » l'implication sur le seul cas où A et B sont vrais.

Cependant, ceci n'est pas sans conséquence sur l'utilisation de l'implication. Premièrement, cela gêne l'utilisation du cadre ensembliste puisqu'on n'envisage pas tous les ensembles et qu'on se cantonne à l'ensemble où A et B sont vrais. Deuxièmement, cela a des répercussions sur l'utilisation de l'implication, dans le traitement de sa négation par exemple. Enfin, cela favorise une conception causale de l'implication. Nous reviendrons sur tous ces aspects dans le prochain chapitre.

(PM-2^{nde})

Signification de "si..., alors..."

[22] Nous reviendrons sur le sens du mot *inférer* dans la partie *définitions pour le raisonnement déductif*

> Lisez attentivement les affirmations suivantes qui se ressemblent. Certaines ont également la même signification, d'autres non. Beaucoup sont fausses.
> [...]
> BILAN
> Pour éviter des ambiguïtés, on préfère, en langage mathématique, utiliser la forme "Si...alors...". Ainsi on évite d'écrire une phrase comme "Deux droites sont contenues dans un même plan si elles sont parallèles." car une telle phrase risquerait d'être interprétée comme signifiant "Si deux droites sont parallèles alors elles sont contenues dans le même plan." ou encore "Si deux droites sont contenues dans un même plan alors elles sont parallèles." (ce qui est faux).

3.2. Définitions dans le cadre de la logique formelle

Les définitions données ici font souvent suite aux définitions des connecteurs logiques de négation, conjonction et disjonction. L'implication est alors définie comme un objet de la logique formelle à l'aide de ces connecteurs. Il n'est plus question ici d'utiliser le concept de la logique naturelle mais de définir un nouveau concept. Ce nouvel objet peut exister sans l'objet naturel et aucun lien avec celui-ci n'est d'ailleurs fait. Notre premier constat est que cette catégorie ne regroupe que des ouvrages de DEUG, ceci n'est pas très étonnant puisque la logique ne doit pas être un objet d'enseignement en seconde.

Les trois premiers manuels donnent des définitions semblables de l'implication. Les définitions sont courtes, chacune suivie d'un commentaire qui porte soit sur la vérité de l'implication lorsque la prémisse est fausse (AF-Deug, ROD-Deug) soit sur la vérité de l'implication lorsque la conclusion est vraie (LFA-Deug). Ceci n'est pas exactement équivalent, le deuxième type de commentaire ne donne pas la vérité de l'implication dans le cas A faux et B faux. Cependant, tous ces commentaires semblent vouloir attirer l'attention du lecteur sur la vérifonctionnalité de l'implication.

(LFA-Deug)

> Etant données deux relations A et B, la relation ((non A) ou B) s'appelle l'implication de B par A et se note : $A \Rightarrow B$.
> Si A et $(A \Rightarrow B)$ sont vraies, B est vraie ; Si B est vraie, $(A \Rightarrow B)$ est vraie pour toute relation A.

(AF-Deug)

> Si A et B sont deux assertions, la disjonction ((non A) ou B) s'appelle implication de B par A et se note : $A \Rightarrow B$.
> […]
> Règle 3 : Si (non A) est vraie, $A \Rightarrow B$ est vraie pour toute B.
> Règle 4 : Si A est vraie et si $A \Rightarrow B$ est vraie, alors B est vraie.
> Il ne faut surtout pas confondre la vérité de $A \Rightarrow B$ avec celle de B ! La règle 4 est appelée principe du syllogisme.

Ce dernier commentaire s'oppose aux manuels qui assimilent $A \Rightarrow B$ et *A donc B*. Ici la distinction est faite, il faut s'assurer de la vérité de A pour conclure à celle de B, la vérité de A n'est pas incluse dans l'écriture $A \Rightarrow B$.

(ROD-Deug)

Soient A et B deux assertions. On constate que les tableaux ci-dessous, qui sont dits tables de vérités, permettent de leur associer cinq nouvelles assertions qui sont notées : $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$
[suivent les tables de vérité]
Les symboles $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ sont appelés connecteurs logiques de négation, de conjonction, de disjonction, d'implication, d'équivalence logique.
Remarque : Si A est une assertion fausse alors $A \Rightarrow B$ est une assertion vraie.

Les trois manuels suivants étayent leur définition formelle de quelques commentaires. Deux de ces manuels mettent en valeur le seul cas où l'implication est fausse [C, FU]. Les trois manuels attirent l'attention du lecteur sur les cas où la prémisse est fausse. Ceci peut être interprété comme un moyen implicite de bien montrer la différence avec l'objet naturel qui ne prend pas en compte le cas de la prémisse fausse. Et ceci est d'autant plus légitime dans le manuel [P] qui a l'objectif de préparer les étudiants au raisonnement.

(C-Deug)

La proposition (Q ou ($\neg$P)) se note ($P \Rightarrow Q$) et s'appelle l'implication de Q par P ; cette proposition est fausse si P est vraie et Q est fausse, elle est vraie dans tous les autres cas. La proposition $P \Rightarrow Q$ se lit "P entraîne Q" ou "Q est conséquence de P" ou encore "Q résulte de P".

(P-Deug)

Si A et B sont des propositions, "$A \Rightarrow B$" en est une ($\Rightarrow$ se lit "entraîne")
[...]
Voyons maintenant la table de vérité de $A \Rightarrow B$; elle contient deux cas qui donnent à réfléchir :
[...]
On voit que cette table affirme que si A est fausse, alors $A \Rightarrow B$ est vraie, que B soit vraie ou fausse !

(FU-Deug)

Les principaux connecteurs binaires sont :
[le manuel présente les connecteurs $\wedge$ et $\vee$]
-le connecteur $\Rightarrow$ d'implication qui fournit l'assertion $P \Rightarrow Q$, appelée **P implication Q**[23], ou encore assertion **"P implique Q"**[24].
[le manuel présente le connecteur $\Leftrightarrow$]
Chacun des connecteurs précédents est défini au moyen de sa table de vérité qui se trouve dans le tableau suivant :
[...]
Ce tableau nécessite quelques commentaires :
[le manuel présente des commentaires sur les connecteurs $\wedge$ et $\vee$]
- ($P \Rightarrow Q$) est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse ; remarquons également que si P est fausse alors ($P \Rightarrow Q$) est vraie."

[23] En gras dans le manuel.
[24] En gras dans le manuel.

3.3. Définition dans le cadre ensembliste

Un seul manuel explicite, dans sa définition basée sur un exemple, la relation entre l'implication et les ensembles. D'autres manuels utiliseront l'implication pour définir l'inclusion (cf. paragraphe *à quelle fin l'objet implication est-il introduit ?*), mais aucun ne propose l'équivalence avec l'inclusion dans la définition.

(I-4ème)

On considère les sous ensembles de N :
$M_5 = \{ x, x \in N, x$ est multiple de $5\}$
$N_0 = \{x, x \in N, x$ est terminé par $0\}$
"Dans N, si x est terminé par 0 alors x est multiple de 5"
Cette phrase exprime que dès qu'un élément du référentiel N possède la première propriété alors il possède nécessairement la seconde ; c'est une proposition vraie appelée implication.
On l'écrit symboliquement :
$(\forall x \in N)$ (x est terminé par 0 $\Rightarrow$ x est multiple de 5)
[...]
La même phrase exprime aussi que "tout élément de N_0 est aussi élément de M_5 " ; ceci se traduit par : "$N_0 \subset M_5$", ce qui est vrai.
[...]
Les exemples précédents nous permettent de dire qu'à une implication on peut associer une inclusion de sous ensembles ; implication et inclusion ont la même valeur logique : elles sont vraies ou fausses en même temps.

L'implication proposée ici est une implication universellement quantifiée, elle est associée à l'inclusion d'ensembles, cela correspond au cas particulier présenté dans notre analyse épistémologique. L'implication universellement quantifiée est la seule proposée par ce manuel. Au paragraphe suivant le manuel explicite le lien entre implication et inclusion.

(I-4ème)

Implication et inclusion
Les exemples précédents nous permettent de dire qu'à une implication on peut associer une inclusion de sous-ensembles ; implication et inclusion ont même valeur logique : elles sont vraies ou fausses en même temps.

Un autre manuel trouve sa place dans le cadre ensembliste. Il ne définit pas l'implication dans le cadre ensembliste (sa définition se trouve dans notre prochain §) mais donne plutôt une interprétation ensembliste de l'implication. Cette interprétation vient juste après la définition donnée par le manuel.

(B-4ème)

On considère un référentiel E, et deux propriétés p et q concernant les éléments de ce référentiel.
Ces deux propriétés permettent de définir deux parties de E :
$E(p) = \{x / x \in E$ et $p(x)\}$
$E(q) = \{x / x \in E$ et $q(x)\}$
Si le théorème
$p \vdash q$
existe, alors on peut dire :
« tout élément qui possède la propriété p, possède la propriété q »
ou
« si un élément x possède la propriété p, alors il possède la propriété q ».
Par suite :

$E(p) \subset E(q)$
On a donc :
$[\, p \vdash q \,] \vdash [E(p) \subset E(q)]$
et aussi
$[E(p) \subset E(q)] \vdash [\, p \vdash q \,]$

3.4. Définitions dans le registre du raisonnement déductif

Les définitions citées dans ce paragraphe sont données dans l'objectif d'apporter une aide aux élèves dans l'utilisation du raisonnement déductif. La plupart des définitions données dans le premier paragraphe (*définitions réduites à une description*) avaient aussi cet objectif, cependant ce qui différencie celles-ci c'est qu'un nouvel objet mathématique est défini, il n'est plus identifié à l'objet naturel. De plus, certains manuels, en particulier de DEUG, ajoutent des compléments d'explication à la définition pour en faire comprendre l'utilisation.

(H-4ème)

[Après quelques exercices sur les énoncés réciproques et des transformations de propositions sous la forme "si...alors...", un exemple pour définir les **conditions nécessaires** et les **conditions suffisantes** :]
Nous dirons que pour que "$x^2 - 9 = 0$" soit vraie :
-la condition x appartient à {-3,0,3} est nécessaire c'est-à-dire obligatoirement remplie mais pas suffisante.
-la condition x=3 est suffisante mais pas nécessaire puisque x peut être aussi égal à -3.
-la condition x appartient à {-3,3} est à la fois nécessaire et suffisante.
[...]
[définition de l'équivalence :]
Au lieu de dire qu'une condition est nécessaire et suffisante, on dit aussi "il faut et il suffit que..." ou bien "...si et seulement si...".

Ce premier exemple donne des définitions encore assez proches de la logique naturelle mais elles sont plus détaillées et plus élaborées que celles du premier paragraphe. La présence de l'exemple les rend, en outre, plus concrètes.

(B-4ème)

Si lorsqu'une assertion p est vraie, l'assertion q est vraie, on dit que l'assertion p entraîne l'assertion q :
On note $p \vdash q$
Et on lit :
« p entraîne q »
ou
« p infère q »
$p \vdash q$ est une inférence.
Une inférence est une assertion qui peut exister ou ne pas exister. Pour qu'elle existe, il suffit de prouver que lorsque p est vraie il en résulte que q est vraie.
[…]
L'existence de [l'inférence] n'entraîne pas l'existence de [l'inférence réciproque].

Ce manuel donne la définition de l'*inférence* et non pas de l'*implication*, mais cette définition est, dans la forme, très proche de celles données par d'autres manuels pour l'implication. Néanmoins, le mot *inférence* n'a pas logiquement le même sens que le mot *implication* puisqu'il apporte l'information supplémentaire de la vérité de l'implication. Ainsi l'on peut lire la définition du mot *inférence* dans le Dictionnaire des Mathématiques :

> *(logique.) Lorsque l'énoncé A⇒B est vrai, on dit parfois que A infère B et l'on écrit A ⊢ B ; le symbole ⊢ est dit symbole d'inférence.*
> *[Bouvier A., George M., Le Lionnais F., 1996]*

De plus, le mot *inférence* fait même souvent référence à une opération de l'esprit permettant, à partir d'une assertion vraie, de **déduire** la vérité d'une autre assertion. C'est cette démarche intellectuelle que l'on trouve dans la définition du dictionnaire Petit Larousse 2003 :

> *(LOG) Opération intellectuelle par laquelle on passe d'une vérité à une autre vérité, jugée telle en raison de son lien avec la première.*
> *[Le Petit Larousse, 2003]*

Ici, le sens accordé au mot *inférence* par le manuel n'est pas clair. Dans la première partie de la définition, il semble s'approcher de la définition du Dictionnaire des mathématiques c'est-à-dire que seul le cas où l'implication est vraie est pris en compte.

(B-4ème)

> Si lorsqu'une assertion p est vraie, l'assertion q est vraie, on dit que l'assertion p entraîne l'assertion q
> […]
> Et on lit : « p infère q »

Mais, devant l'ostensif p ⊢ q, l'assurance de la vérité de l'implication associée n'est pourtant pas garantie, puisque l'inférence peut, d'après le manuel, exister ou non :

(B-4ème)

> Une inférence est une assertion qui peut exister ou ne pas exister. Pour qu'elle existe, il suffit de prouver que lorsque p est vraie il en résulte que q est vraie.
> […]
> L'existence de [l'inférence] n'entraîne pas l'existence de [l'inférence réciproque].

C'est pourquoi il nous semble que le mot *inférence* est, ici, utilisé pour faire référence au concept d'*implication*.

(LM-Deug)

> Si P et Q sont des propositions, la proposition "si P, alors Q" exprime que si P est vraie, alors Q est vraie aussi. Les propositions de ce type sont tellement utilisées qu'on leur a donné un nom : on les appelle des implications. La proposition "si P, alors Q" peut aussi s'exprimer par "P implique Q" ou encore par "P donc Q". Lorsque les propositions P et Q sont constituées de symboles mathématiques et seulement dans ce cas, on peut utiliser le signe ⇒ qui se lit "implique" et l'on écrit P ⇒ Q pour exprimer que la proposition P implique la proposition Q.
> [...]
> Si P et Q sont des propositions, la proposition (P ⇒ Q) est vraie seulement dans l'un des cas suivants : ou bien P et Q sont vraies, ou bien P est fausse. Ainsi (P ⇒ Q) est vraie si et seulement si l'une des propositions non(P) ou Q est vraie.
> [...]
> En particulier, si la proposition P est fausse, alors la proposition (P ⇒ Q) est vraie.

Cette définition propose de nombreuses explications sur l'utilisation de l'implication et du symbole $\Rightarrow$ associé. Ici encore l'expression *P donc Q* est donnée comme synonyme de l'expression *P implique Q*, restreignant l'implication sur le cas où P et Q sont vrais. Les dernières phrases proposent une définition de l'implication dans le cadre de la logique formelle en donnant l'équivalence avec *Non P ou Q*. Comme dans certaines précédentes définitions, l'attention du lecteur est, ici, attirée sur les cas où la prémisse est fausse.

(Le-Deug)

Si A et B sont deux affirmations, l'écriture A $\Rightarrow$ B signifie « Si l'affirmation A est vraie, alors l'affirmation B est vraie ».

(L-Deug)

Soit P et Q des propositions. On appelle implication de Q par P et on note P $\Rightarrow$ Q la proposition qui est fausse si P est vraie et Q est fausse, et qui est vraie dans les autres cas.
[...]
Attention : $\Rightarrow$ est un symbole qui ne doit s'utiliser que dans une formule propositionnelle. Il ne faut donc pas le confondre avec le mot "donc", mot de la langue ordinaire, qui sert à décrire une étape d'une démonstration : si dans la suite des propositions vraies d'une théorie mathématique figurent la proposition P et la proposition P $\Rightarrow$ Q, alors on peut conclure que Q est vrai :
- P
- P $\Rightarrow$ Q
- donc : Q

La règle qui permet de passer de P et P $\Rightarrow$ Q à Q s'appelle règle de détachement.
N'employez jamais $\Rightarrow$ à la place de donc.[25]

Ce manuel, contrairement au précédent, n'identifie pas *donc* et *implique*. Au contraire, il attire l'attention du lecteur sur cette difficulté, la dernière phrase étant une mise en garde stricte. D'autre part, la première phrase permet de remplir la table de vérité de l'implication sans que la définition dans le cadre logique soit approfondie, les connecteurs logiques ne sont pas cités.

À la suite de ces définitions nous voulons souligner deux points :

• La signification de l'implication est souvent "écrasée" sur le cas où la **prémisse** et la **conclusion** sont toutes les deux **vraies**. En effet, certaines définitions, le plus souvent dans le registre déductif, ne prennent en compte que ce cas et ignorent les trois autres possibilités.

P vrai implique Q vrai ; Si P est vrai, alors Q est vrai ; P donc Q

Comme nous l'avons déjà dit les conséquences de cet écrasement, et en particulier la conception causale de l'implication, seront détaillées dans le prochain chapitre.

Ainsi, les définitions ou remarques liées au raisonnement déductif connotent souvent une notion de **causalité** voire de **temporalité**.

[25] En gras dans le manuel.

On a Q dès qu'on a P ; Si P est vrai alors Q est vrai

Cet aspect causal est renforcé par la définition de la démonstration dans les manuels. En effet, celle-ci est présentée comme une suite de phrases, reliées entre elles par des théorèmes, propriétés ou définitions, menant des hypothèses jusqu'à la conclusion.

(AC-4ème)

"Démontrer" signifie ici, constituer une chaîne d'égalités toutes justifiées par une définition ou une propriété du cours.
[L'implication apparaît alors matérialisée par les flèches montrant le passage d'une ligne à l'autre.]

(I-4ème)

On bâtit ainsi de proche en proche une série de maillons qui conduiront de l'hypothèse à la conclusion : c'est un raisonnement déductif.

(B-2nde)

Démontrer que l'énoncé "P implique Q" est vrai, c'est démontrer qu'en partant de l'hypothèse P est vrai, on aboutit, en appliquant des règles de calcul, des théorèmes, des définitions connus, à la conclusion Q est vrai

3.5. Les exemples illustrant la définition dans les manuels de DEUG

Certains manuels n'accompagnent leur définition d'aucun exemple d'implication (ROD-Deug, LFA-Deug, Le-Deug, LM-Deug) ou d'un seul exemple (C-Deug, AF-Deug).

De plus, les exemples proposés sont assez typés et paraissent « exotique » au vu de la pratique courante des mathématiques : **cadre propositionnel**, **prémisse fausse**, **pas de lien explicatif** entre P et Q.

(C-Deug)

Par exemple, "5 est un nombre pair" $\Rightarrow$ "3 est un nombre pair" est vraie.

(L-Deug)

Si 0=0 alors 1=1. Si 2 =-2 alors 4=4.

(FU-Deug)

(racine de 2 > 0 $\Rightarrow$ 1>0), (racine de 2 <0 $\Rightarrow$ 1>0)

Ces exemples paraissent "anecdotiques", ils ne permettent pas de donner un sens à l'outil et sont hors de la pratique des mathématiques pour l'étudiant. Ils pourraient permettre de donner du sens à l'implication si un travail était fait pour qu'ils deviennent une situation problématique, mais ils sont livrés à l'étudiant comme des exemples isolés.

Enfin, un exemple est remarquable par l'explication qui suit :

(P-Deug)

> Par exemple, l'énoncé $(-1>0) \Rightarrow (1<0)$ est vrai car c'est un cas particulier de la règle $(x>0) \Rightarrow (-x<0)$ qui est tout à fait correcte, mais bien sûr $-1>0$ est faux, ce qui fait qu'on ne peut accorder aucun crédit à la conséquence $1<0$.

Bien que l'auteur ait donné la propriété "Si P est fausse alors P implique Q est vraie", il ne l'utilise pas pour statuer sur la vérité de l'implication et préfère pour cela **s'appuyer sur un lien explicatif**. Un deuxième exemple avec une explication du même type suit :

(P-Deug)

> De même, $1<0 \Rightarrow 1>0$ est vrai car c'est un cas particulier de la proposition tout à fait correcte $(x<0) \Rightarrow (x^2>0)$; cette fois, $1<0$ est faux et $1>0$ est vrai ; mais cette conclusion que $1>0$ est vraie ne résulte pas logiquement de $1<0 \Rightarrow 1>0$ puisque la prémisse est fausse ; cette « démonstration » de $1>0$ doit donc être rejetée même si le résultat est exact car, pour l'établir, il va falloir une autre démonstration qui, elle, sera correcte.

Ici encore, le manuel justifie la vérité de l'implication par l'existence d'une « règle » ou d'une « proposition », c'est-à-dire d'un **lien causal** qui permet de passer de l'hypothèse à la conclusion. Bien sûr la recherche d'un « lien » entre l'hypothèse et la conclusion est la plus grande part de l'activité mathématique, il n'y a pas d'intérêt pour le mathématicien d'établir des implications, dont on sait la vérité grâce à la prémisse fausse, entre des propriétés qui n'ont aucun « lien ». Cependant, ici, le manuel n'est pas dans le cadre d'une activité de preuve. Ce qui nous paraît paradoxal, c'est le fait qu'il propose les tables de vérité, explicite le cas de la prémisse fausse pour conclure ses exemples sans faire appel à cette propriété mais en se rapportant à un lien causal. Ceci laisse croire que l'argument « une implication est vraie lorsque la prémisse est fausse » n'est pas convaincant et que lorsqu'on le peut il vaut mieux trouver un argument causal entre l'hypothèse et la conclusion.

Dans ces deux exemples, le manuel attire l'attention du lecteur sur le fait qu'on ne peut utiliser la conclusion d'une implication, même si elle est démontrée vraie, sans avoir vérifié la vérité de l'hypothèse. Même dans les exemples, l'objectif de préparation au raisonnement déductif est prégnant.

4. Dans quel(s) objectif(s) l'objet implication est-il introduit ?

Les objectifs des manuels peuvent être séparés en deux grands groupes. Dans le premier groupe, composé surtout de manuels de DEUG, l'implication est utilisée pour définir de nouveaux objets de la théorie des ensembles. Nous faisons l'hypothèse que c'est parce que l'objet implication, utilisé, implicitement au moins, depuis longtemps est considéré connu que son utilisation dans le raisonnement n'est que peu développée. Au contraire, pour l'autre groupe, l'utilisation de l'implication dans le raisonnement est l'objectif explicite des manuels. Ce second groupe rassemble quelques manuels de DEUG, presque tous les manuels de quatrième et tous les manuels de seconde. Pour les deux derniers groupes, cet objectif est justifié puisque les élèves débutent dans l'utilisation de l'implication.

4.1. Outil à la théorie des ensembles

quatrième :	1/5	seconde :	0/7	DEUG :	4/9

Ce groupe réunit surtout des livres de DEUG qui ont tous défini l'implication comme objet de la logique formelle. L'implication est utilisée maintenant pour définir l'inclusion entre deux ensembles. Ces manuels ont tous fait le choix épistémologique d'utiliser l'implication pour définir l'inclusion, aucun des manuels étudiés n'a fait le choix inverse[26]. L'implication sera aussi utilisée, par exemple, pour montrer la transitivité et l'antisymétrie de l'inclusion.

(LFA-Deug)

Soient E et F deux ensembles. nous écrirons $E \subset F$ (E est inclus dans F, ou E est une partie de F), pour exprimer la relation :
$\forall x, (x \in E) \Rightarrow (x \in F)$

(AF-Deug)

On dit que l'ensemble E est inclus dans l'ensemble F ssi on a :
$(\forall x)\ (x \in E) \Rightarrow (x \in F)$

(ROD-Deug)

Soient A et B des ensembles. On dit que A est inclus dans B, et on écrit $A \subset B$ ou $B \supset A$ si et seulement si
$\forall x\ (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$

(C-Deug)

Dans ce qui suit nous supposons que le lecteur a pris connaissance du contenu de l'appendice A.
[appendice de logique propositionnelle dans lequel figure la définition de l'implication, des connecteurs logiques Non, Et, Ou et leurs tables de vérité]
[On l'utilise alors pour montrer que]
$\neg(\neg x \in A)$ équivaut à $x \in A$
[et que]
Si A et B sont des parties de X, $A \subset B$ si et seulement si la proposition
$(\forall x \in X)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$ est vraie
[ou encore que]
(i) $(A \subset C \text{ et } B \subset C) \Rightarrow (A \cup B) \subset C$
(ii) $A \cup A = A$
(iii) $A \cup B = B \cup A$
(iv) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

[26] Les deux alternative, définir l'inclusion à partir de l'implication ou définir l'implication à partir de l'inclusion, sont détaillées dans l'analyse épistémologique (chap.1).

(B-4ème), quant à lui, ne présente pas réellement une définition de l'inclusion grâce à l'implication mais plutôt une interprétation ensembliste de l'implication. Cependant, c'est grâce au concept d'*inférence* déjà défini qu'il définira la transitivité et l'antisymétrie de l'inclusion. L'*inférence* est donc bien, ici, un outil pour définir des objets de la théorie des ensembles.

(B-4ème)

transitivité de l'inclusion :
Soient des ensembles A, B, C tels que $A \subset B$ et $B \subset C$.
On a :

$$\left[\begin{array}{c} A \subset B \\ \text{et} \\ B \subset C \end{array}\right] \vdash \left[\begin{array}{l} (x\in A) \vdash (x\in B) \\ \text{et} \\ (x\in B) \vdash (x\in C) \end{array}\right]$$

$$\vdash \quad [\,(x\in A) \vdash (x\in C)\,]$$

$$\vdash \quad [\,A \subset C\,]$$

D'où :
$[A \subset B \text{ et } B \subset C] \vdash [\,A \subset C\,]$
On dit alors que l'inclusion est transitive.
[…]
antisymétrie de l'inclusion :
Soient des ensembles A, B tels que $A \subset B$ et $B \subset A$.
On a :

$$\left[\begin{array}{c} A \subset B \\ \text{et} \\ B \subset A \end{array}\right] \vdash \left[\begin{array}{l} (x\in A) \vdash (x\in B) \\ \text{et} \\ (x\in B) \vdash (x\in A) \end{array}\right]$$

$$\vdash \quad [\,(x\in A) \Leftrightarrow (x\in B)\,]$$

$$\vdash \quad [\,A = B\,]$$

D'où :
$[A \subset B \text{ et } B \subset A] \vdash [\,A = B\,]$
On dit alors que l'inclusion est antisymétrique.

L'utilisation de l'implication dans les démonstrations est montrée, dans les manuels de DEUG lorsque l'on définit l'équivalence, la contraposée, les raisonnement par l'absurde ou par disjonction des cas...

(AF-Deug)

Règle 6 : Si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$ sont vraies, alors $A \Rightarrow C$ est vraie.
C'est la transitivité de l'implication qui peut s'écrire aussi :
$(\,(A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow C)\,) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
Règle 7 : Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et B des assertions ; Si (A_1 ou A_2 ou…ou A_n) et ($A_1 \Rightarrow B$), ($A_2 \Rightarrow B$), …, ($A_n \Rightarrow B$) sont vraies, alors B est vraie.
(C'est la « disjonction des cas ».)
[…]
Règle 8 : Soit A une assertion d'une théorie ; rajoutons l'axiome (non A) à la théorie considérée, et supposons trouvée dans la théorie ainsi obtenue une assertion B telle que (nonA) $\Rightarrow$ B et (nonA) $\Rightarrow$ (non B) soient vraies dans cette nouvelle théorie ; alors A est vraie dans la théorie de départ.
C'est le principe du « raisonnement par l'absurde ». Dans la pratique on dit qu'on a, à partir de (non A), abouti à une contradiction.

(LFA-Deug)

10) (A $\Rightarrow$ B) $\Leftrightarrow$ ((nonB) $\Rightarrow$ (non A))

L'implication : (nonB) $\Rightarrow$ (non A) est appelée la *contraposée* de (A $\Rightarrow$ B). Elle est, dans certains cas, beaucoup plus facile à démontrer que (A $\Rightarrow$ B).

[…]

18) [(A ou B) et (A $\Rightarrow$ C) et (B $\Rightarrow$ C)] $\Rightarrow$ C

La propriété (18) constitue la méthode de raisonnement appelée *disjonction des cas*. Son intérêt résulte de ce que, si (A ou B) est vraie, on ne sait rien sur la vérité de A, ni sur celle de B. Par exemple, puisque (A ou (non A)) est toujours vraie, la relation [(A $\Rightarrow$ C) et (non A $\Rightarrow$ C)] $\Rightarrow$ C est toujours vraie (même si A est indécidable !).

(C-Deug)

Comme l'implication P $\Rightarrow$ Q est vraie lorsque P est fausse, pour démontrer que le théorème P $\Rightarrow$ Q est vrai on doit prouver que si P est vraie, alors Q est vraie.

(xii) (P $\Rightarrow$ Q) $\Leftrightarrow$ ($\neg$Q $\Rightarrow$ $\neg$P)

La proposition (xii) ci-dessus est à l'origine du raisonnement par l'absurde : elle montre que pour prouver un théorème, on peut aussi prouver que si sa conclusion est fausse, alors son hypothèse est fausse.

Le manuel (C-Deug) confond *raisonnement par l'absurde* et *raisonnement par contraposée*. Dans le raisonnement par l'absurde, la contradiction ne se fait pas forcément sur la proposition A comme semble le dire ce manuel.

Dans le manuel de quatrième (B-4$^{\text{ème}}$), le lien avec la démonstration est fait dans les paragraphes : *démonstration par inférences successives*, *démonstration par contraposition*.

(B-4$^{\text{ème}}$)

Démonstration par inférence successives

On considère les inférences successives :

p $\vdash$ q

q $\vdash$ r

On peut alors affirmer que l'assertion p entraîne l'assertion q.

On a donc :

[(p $\vdash$ q) et (q $\vdash$ r)] $\vdash$ [p $\vdash$ r]

On dit alors que l'inférence est transitive.

[…]

Démonstration par contraposition

Pour démontrer l'inférence

p $\vdash$ q $\qquad$ T_1

on peut démontrer l'inférence :

(non q) $\vdash$ (non p) T_2

On dit qu'on passe de T_1 à T_2 par contraposition.

Le manuel (B-4$^{\text{ème}}$) ne justifie pas l'affirmation de la transitivité de l'inférence. En revanche, il justifie l'équivalence des deux inférences contraposées par l'équivalence des inclusions entre ensembles et ensembles complémentaires : [A $\subset$ B] $\vdash$ [$B^C \subset A^C$] où A^C (resp. B^C) est le complémentaire de A (resp. B) dans l'ensemble de référence E. L'implication est un outil pour définir des objets de la théorie des ensembles mais les propriétés d'ensembles sont aussi des outils pour définir des propriétés sur l'implication. Il est ainsi le seul manuel proposant des « allers-retours » entre l'implication et les ensembles.

4.2. Outil au raisonnement déductif

quatrième : 4/5	seconde : 7/7	DEUG : 5/9

Il est ici question de savoir utiliser l'outil implication dans les raisonnements mathématiques, en particulier dans le raisonnement déductif. La moitié des manuels de DEUG, tous les manuels de quatrième sauf un et tous les manuels de seconde appartiennent à cette catégorie. L'implication est, le plus souvent, un concept nouveau que l'élève doit apprendre à manipuler dans les démonstrations, le manuel se chargeant de le mettre en garde contre les erreurs les plus courantes.

Dans les manuels de quatrième et de seconde, les titres des chapitres, des paragraphes ou des fiches "d'aide" montrent bien le lien avec le raisonnement déductif : *Pour justifier et raisonner* (N-4ème) ; *Comment utiliser un théorème ?* (I-4ème) ; *Comment aborder une démonstration ?, Rédiger une démonstration* (F-2nde) ; *Démontrer qu'une implication est vraie, Démontrer qu'une implication est fausse, Utiliser qu'une implication est vraie* (B-2nde) ; *Quelques types de raisonnements fréquemment utilisés*, *Logique du raisonnement mathématique - Méthodes usuelles de démonstration* ; *Les démonstrations indirectes* (P, FU) etc.

(I-4ème)

> Schéma du théorème : H $\Rightarrow$ C avec H : hypothèse, C : conclusion
> Supposons qu'on sache, H vraie. Nous pouvons déduire C vraie.
> Supposons qu'on sache C fausse. Nous pouvons déduire H fausse.
> (En effet, d'après le § précédent si H était vraie, C aussi. Or cela n'est pas. Par conséquent H ne peut être vraie. Comme c'est une proposition elle est fausse.)

Les explications de ce manuel portent sur l'utilisation d'une implication connue pour vraie et non pas sur la démonstration de cette implication. De plus, (I-4ème) utilise la logique naturelle et le *Modus Tollens* pour convaincre les élèves de la vérité de la contraposée du théorème donné. En revanche, il se base sur les connaissances de logique qu'il a introduites précédemment pour utiliser la propriété du tiers exclu (une proposition est soit vraie soit fausse).

(T-2nde)

> Dans cette démonstration, on a utilisé les mots "**donc**", "**d'où**". Ces mots traduisent l'idée d'implication.

(D-2nde)

> Comprendre l'énoncé d'un théorème.
> [...]
> Le théorème, en trois parties, indique un sens de raisonnement (on parle de raisonnement inductif) : "dans (0), si (1), alors (2)".
> (0) la situation (les conditions), (1) les données (hypothèses), (2) la conclusion (le résultat).
> La partie (0) est parfois contenue dans la partie (1).

On voit que ces manuels de seconde, comme dans les définitions, restent très proches de la logique naturelle. Le vocabulaire est vague *traduisent l'idée*, *indique un sens de raisonnement*. Il n'y a pas de bases solides dans le cours sur l'implication sur lesquelles appuyer l'apprentissage de la démonstration. De plus, (D-2nde) en parlant de *sens de raisonnement* dans un théorème induit l'idée d'une temporalité entre hypothèse et conclusion : l'hypothèse doit être « déjà » vérifiée pour que la conclusion soit vérifiée, c'est-à-dire que l'hypothèse est vraie « avant » la conclusion. Cette conception temporelle de l'implication sera détaillée dans le prochain chapitre.

Les manuels de DEUG proposent différents types de raisonnements mathématiques : *Quelques types de raisonnements fréquemment utilisés* (P-Deug) ; *Logique du raisonnement mathématique - Méthodes usuelles de démonstration* (FU-Deug) ; *S'exprimer en mathématiques* (LM-Deug). Ils présentent pour la plupart le *raisonnement par contraposée (FU, P, Le, L, LM)*, le *raisonnement par l'absurde (FU, P, L, LM)*, le *raisonnement par disjonction des cas (FU, LM)*, le *raisonnement par récurrence (FU, P, Le, LM).*

(Le-Deug)

> Il faut noter aussi que, si « non A » est l'affirmation contraire de A, alors non B $\Rightarrow$ non A est équivalent à A $\Rightarrow$ B. C'est ce qu'on appelle parfois « *raisonnement par l'absurde* ».
> Mentionnons enfin le « *raisonnement par récurrence* » (induction en anglais) ; si A_0, A_1, A_2,…, A_n, … sont une suite d'affirmation, et qu'on ait réussi à montrer deux choses :
> A_0 est vraie ;
> $\forall$ n entier ≥ 0, $A_n \Rightarrow A_{n+1}$
> On en déduit que $\forall$ n entier ≥ 0, A_n est vraie.

On voit que ce manuel confond, lui aussi, *raisonnement par l'absurde* et *raisonnement par contraposée.* Les manuels (FU, P, L et LM) font au contraire bien la différence entre le raisonnement par contraposée et le raisonnement par l'absurde, ils sont présentés dans des paragraphes différents, certains manuels alertant même le lecteur sur le risque de confusion :

(P-Deug)

> Le schéma « si B n'était pas vrai, alors on n'aurait pas A » est plutôt une démonstration par contraposition bien qu'il soit tentant de l'appeler également raisonnement par l'absurde.
> Quand on fait u vrai raisonnement par l'absurde, et non une démonstration par contraposition, on pose simultanément A et Non B et la démonstration de C [la contradiction] nécessite effectivement l'utilisation de ces deux hypothèses.

(L-Deug)

> **Raisonnement par l'absurde.**
> Il est essentiel de remarquer que le raisonnement par contraposée ne *conduit à aucune contradiction*. Le raisonnement par l'absurde, au contraire, consiste à prendre pour hypothèse H une proposition dont on veut démontrer qu'elle est fausse, pour aboutir à une conclusion absurde, c'est-à-dire contradictoire avec l'ensemble des hypothèses choisies (et des faits mathématiques connus). On reconnaît un vrai raisonnement par l'absurde au fait qu'on ne peut pas en éliminer la contradiction. Souvent la conclusion qu'on obtient est la négation de l'hypothèse H : il y a bien contradiction. Mais a-t-on vraiment utilisé H dans le raisonnement ? Si oui, on a raisonné par l'absurde. Si non, on a en fait raisonné par simple contraposition.

Quelques exemples de raisonnements dans le manuel (FU-Deug) :

(FU-Deug)

> […] résoudre un problème, c'est montrer une proposition du type H $\Rightarrow$ C : c'est **déduire**[27] C de H, c'est-à-dire **démontrer l'assertion C sous l'hypothèse H** (on dit aussi **démontrer** ou **prouver la proposition C**, ou **montrer la proposition C**, ou encore **montrer l'assertion C sous l'hypothèse H**) ; on dispose pour cela non seulement de la donnée H (ou **hypothèse principale**) du problème mais aussi des propositions de

[27] en gras dans le manuel

la théorie concernée. Pour démontrer $H \Rightarrow C$ on met en évidence une suite $Q_0, Q_1, Q_2,\ldots, Qn, Q_{n+1}$ d'assertions (non nécessairement vraies dans la théorie) telles que Q_0 soit H affectée de la valeur de vérité V, Q_{n+1} soit C, et telles que la vérité de chaque Q_i (pour $1 \leq i \leq n+1$) puisse être déduite des valeurs de vérité V des assertions précédentes $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{i-1}$, par l'intermédiaire des propositions de la théorie et des règles logiques.

Cette explication de la démonstration paraît peu claire sauf pour quelqu'un sachant déjà ce qui est attendu dans une démonstration. Et c'est bien de cela qu'il s'agit, les étudiants de DEUG font des démonstrations depuis longtemps, il s'agit ici de formaliser et d'employer des mots qui viennent d'être définis. La remarque *non nécessairement vraies dans la théorie* n'est pas claire. Le raisonnement proposé peut être traduit par : *si l'on suppose que l'hypothèse H est vraie, est-on assuré que tous les Q_i suivants (et donc C) sont vrais ?* Ainsi, si l'hypothèse H se révèle fausse, certains Q_i peuvent être faux dans la théorie, mais le manuel n'explicite pas ce cas.

(FU-Deug)

a) La démonstration par **contraposition** de $(P \Rightarrow Q)$ consiste à démontrer directement qu'on a $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$; c'est-à-dire que la contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est vraie. Elle s'appuie sur la loi de contraposition :

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

On écrit donc lors de la rédaction :

Raisonnons par contraposition. Supposons qu'on a $\neg Q$ et montrons qu'on a $\neg P$…

[…]

b) La démonstration par l'**absurde** s'appuie sur la règle logique suivante, que le lecteur pourra vérifier sans peine :

$[(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)] \Leftrightarrow P$

Cette forme démonstrative consiste, pour montrer qu'une assertion P est vraie, à montrer que $(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$ est vraie pour une certaine assertion Q. Pour cela on suppose que P est fausse, et on recherche une assertion Q (non connue à l'avance) telle qu'on ait à la fois Q et $\neg Q$; on aboutit donc à la contradiction $(Q \wedge \neg Q)$ (ce qui n'est pas autorisé en vertu de la règle (1) p14 ; on dit parfois que l'hypothèse P fausse est absurde) ; par suite P est vraie.

On écrit lors de la rédaction :

Raisonnons par l'absurde ; supposons qu'on a $\neg P$ et montrons qu'on obtient une contradiction…

[…]

c) La démonstration par **disjonction des cas**

En contraposant chacune des assertions $(\neg P \Rightarrow Q)$ et $(\neg P \Rightarrow \neg Q)$ dans la règle logique figurant au début du paragraphe précédent, on obtient :

$[(Q \Rightarrow P) \wedge (\neg Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow P$

Ainsi pour montrer qu'une assertion P donnée est vraie, il suffit de trouver une assertion Q telle que $(Q \Rightarrow P)$ et $(\neg Q \Rightarrow P)$ soient vraies. Précisons qu'en général l'assertion Q intervient de façon naturelle au cours de l'analyse.

Lors de la rédaction on écrit :

1^er^ cas : *Supposons qu'on a Q et vérifions qu'on a P…*

2^ème^ cas : *Supposons maintenant qu'on a $\neg Q$ et vérifions qu'on a encore P…*

[…]

d) La démonstration par **récurrence**

[…]

P étant une « assertion » de la variable entière n, on a la proposition :

$[P(0) \wedge (\forall k \in N, P(k) \Rightarrow P(k+1))] \Rightarrow [\forall n \in N, P(n)]$

Démonstration.

[…]

C'est de la proposition précédente que découle le procssus de la démonstration par récurrene, il se déroule en trois étapes :

1ère étape (initialisation) : on montre que P(0) est vraie.

2ème étape (hypothèse de récurrence) : k étant u entier naturel, on suppose P(k).

3ème étape (transmissibilité) : on montre qu'on a P(k+1)…et on conclut.

[…]

Le manuel (FU-Deug), contrairement à d'autres manuels, n'insiste pas sur les erreurs des étudiants, et ses définitions sont très formelles. D'autre part il utilise l'implication dans son troisième chapitre *Notions fondamentales de la théorie des ensembles*, pour montrer, par exemple, la transitivité de l'inclusion d'ensembles. Tout ceci le pousse vers la catégorie précédente des livres plus formels utilisant l'implication pour la théorie des ensembles.

D'autres manuels, recensent des erreurs courantes d'élèves. (P-Deug), par exemple, met en garde les étudiants devant les difficultés de l'utilisation de l'implication :

(P-Deug)

> On voit que cette table [de vérité de l'implication] affirme que si A est fausse (0), alors A ⇒ B est vraie que B soit vraie ou fausse ! C'est très surprenant au premier abord. Il faut bien comprendre la différence qu'il y a entre la proposition logique A ⇒ B et l'utilisation faite dans le raisonnement mathématique de A ⇒ B. En maths, le plus souvent A ⇒ B est utilisée dans le cas où A est connue comme étant vraie afin d'en déduire B ; donc on ne conçoit pas, dans ce cas, de partir d'une proposition qui serait fausse. Souvent, quand nous écrivons A ⇒ B, nous voulons dire en fait A vraie ⇒ B vraie, ce qui est différent dans une étude rigoureuse de la logique ; mais alors le raisonnement mathématique ne dit rien de ce qui se passe si A est faux !
>
> Il y a cependant des cas, assez fréquents, ou une proposition de la forme A ⇒ B est connue comme vraie quand A est vraie, mais où il existe des cas particuliers qu'il est intéressant d'englober dans le théorème, pour lesquels A est fausse ; ce sont souvent des situations mettant en jeu l'ensemble vide. Par exemple, $A \subset B$ se traduit par l'implication $x \in A \Rightarrow x \in B$; si A est l'ensemble vide, $x \in A$ est toujours fausse, cependant il est vrai par définition que $A \subset B$; donc il faut accepter que l'énoncé $x \in A \Rightarrow x \in B$ soit vrai bien que $x \in A$ soit fausse.
>
> […]
>
> Donc l'établissement d'une table de vérité pour A ⇒ B a amené les logiciens à fixer la valeur de A ⇒ B quand A est fausse ; et l'étude de situations comme celles envisagées ci-dessus les a amenés à poser que si A est fausse, alors A ⇒ B est vraie. Le bon sens seul ne suffit pas à répondre de manière satisfaisante à ce problème.

Dans ces paragraphes, le manuel attire l'attention du lecteur sur le cas où la prémisse de l'implication est fausse. Ces deux cas sont montrés comme une nécessité du système mais dont les causes, bien que connues des logiciens, sont floues pour les étudiants et ne relèvent en aucun cas du *bon sens*. En effet, si le *bon sens* interprète l'implication comme un *lien causal* entre A et B (*A est la cause de B*) alors le cas où A est faux est interprété soit comme un cas *hors-sujet*, n'ayant pas d'intérêt, soit comme amenant une conséquence fausse c'est-à-dire A faux ⇒ B faux. Nous reviendrons sur ces interprétations au chapitre suivant.

Des exemples sont cités pour justifier les choix faits dans le cas où la prémisse est fausse (cas de l'ensemble vide), mais sans qu'on sache s'il n'y a pas d'autres exemples qui auraient nécessité le choix contraire. Pourtant, nous avons montré dans notre analyse épistémologique que, une fois les conventions de la logique formelle posées, les choix faits pour les cas de la prémisse fausse viennent de nécessités tout à fait claires, comme la valeur de vérité de la contraposée et la non symétrie en A et B de l'implication.

Ces paragraphes ont la qualité d'attirer l'attention des étudiants sur ces deux cas, même si l'explication est peu convaincante, et de rappeler que dans une démonstration mathématique on n'utilise, en général, que la partie de l'implication A vrai ⇒ B vrai. L'objectif du manuel est, ici, de faire la différence entre l'implication de la logique formelle et le sens de l'implication utilisée dans une démonstration.

De plus, l'exemple donné pour légitimer les deux cas des prémisses fausses est intéressant. Alors que dans beaucoup d'autres manuels l'implication est utilisée pour définir l'inclusion, on voit ici que l'inclusion de l'ensemble vide dans tout autre ensemble est le moyen de justifier ces cas. Cette inclusion s'appuyant sur la perception naturelle que nous avons des ensembles.

Dans la suite, le manuel décrit les erreurs à ne pas faire dans les cas où la prémisse est fausse.

(P-Deug)

> Pour l'instant il importe de bien comprendre que l'énoncé A $\Rightarrow$ B peut être vrai même si A est faux ; par exemple, dans une démonstration, si vous utilisez un résultat faux (sans vous en rendre compte…), notons-le A, A $\Rightarrow$ B peut être tout à fait correct ; mais de ceci, du fait que A est faux, vous ne pouvez pas en déduire que B est vrai, ni d'ailleurs qu'il est faux ; A étant faux et A $\Rightarrow$ B étant vrai, vous ne pouvez rien en déduire sur B.
>
> […]
>
> Ceci n'est pas une discussion stérile car les copies d'élèves contiennent malheureusement parfois des erreurs de logique de ce genre ; il est possible que ceci ne suffise pas à éviter ce genre de fautes, mais cela devrait aider à comprendre pourquoi le correcteur est quelquefois obligé de refuser une "démonstration" d'un élève, soit parce qu'elle est fausse du fait d'une prémisse fausse, soit parce qu'une prémisse A non établie est utilisée pour démontrer B ; si l'on n'a pas démontré que A, même si l'on a très correctement montré que A$\Rightarrow$ B, on ne peut pas accepter de considérer B comme démontrée."

Le manuel s'intéresse maintenant à l'utilisation de l'implication dans les démonstrations et en particulier dans les copies des étudiants. C'est l'utilisation de l'outil qui est présentée avec tous les pièges qu'il peut comporter. Plus loin, on trouve encore un paragraphe avertissant les étudiants d'autres erreurs courantes sur l'implication :

(P-Deug)

> Erreurs à ne pas commettre :
>
> […]
>
> Ne pas confondre « réciproque » et « contraposée ».
>
> B $\Rightarrow$ A est l'énoncé réciproque de A $\Rightarrow$ B ; il n'y a pas de raison que ces deux énoncés soient vrais simultanément (ce n'est le cas que si A $\Leftrightarrow$ B).
>
> […]
>
> La négation de A $\Rightarrow$ B n'est pas « A $\Rightarrow$ Non B » mais « A et Non B ».

Nous avons montré [Deloustal, 1999], et ce sera redit dans le chapitre suivant, que la négation de l'implication était une notion difficile même pour des étudiants préparant le concours d'enseignement des mathématiques. Beaucoup d'implications (A $\Rightarrow$ Non B, Non A $\Rightarrow$ B…) sont proposées pour la négation de l'implication (A $\Rightarrow$ B), même parfois la contraposée !

Un autre manuel explique l'utilisation de l'implication dans un raisonnement mathématique. Il est très concret et va jusqu'à donner les expressions qui doivent introduire et terminer un raisonnement.

(LM-Deug)

Pour affirmer qu'une proposition Q est vraie, on fait un raisonnement ou une démonstration. Pour cela, on utilise des propositions que l'on sait déjà être vraies et l'on en déduit la proposition Q grâce à un petit nombre de règles précises. Voici les règles du raisonnement.

[...]

Le raisonnement direct :

Si la proposition P est vraie et si la proposition ($P \Rightarrow Q$) est vraie, alors la proposition Q est vraie. En effet, supposons que les propositions P et ($P \Rightarrow Q$) sont vraies. Puisque la proposition ($P \Rightarrow Q$) est vraie, c'est que la proposition P est fausse ou bien que les propositions P et Q sont toutes les deux vraies ; puisque P est vraie, P n'est pas fausse et donc la proposition Q est vraie. Voici le schéma de cette déduction :

(P et ($P \Rightarrow Q$)) $\Rightarrow Q$

Quelquefois, la proposition $P \Rightarrow Q$ aura été démontrée dans le cours sous forme d'un théorème ou d'un corollaire. Dans ce cas, il suffit de citer le résultat en question pour être assuré que P implique Q. Mais souvent il faudra démontrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie. Pour cela, on fait l'*hypothèse* que la proposition P est vraie et l'on démontre que la proposition Q est vraie. Une démonstration de $P \Rightarrow Q$ est introduite par l'expression « Supposons P » et se termine par « donc Q ».

[…]

Le raisonnement cas par cas :

Il s'applique lorsque l'on veut démontrer une implication de la forme ((P ou Q) $\Rightarrow$ R). On distingue deux cas : ou bien P est vraie et il faut démontrer qu'alors R est vraie ; ou bien Q est vraie et il faut démontrer qu'alors R est vraie. La structure du raisonnement est :

Premier cas : Supposons que P est vraie…donc R

Second cas : Supposons que Q est vraie…donc R

Au vu de ces résultats, il semblerait qu'il y ait **deux objets implication distincts**, suivant que l'on est dans le **cadre démonstratif** ou dans le **cadre logique**. Il apparaît, de plus, que le premier (cadre démonstratif) serait **moins rigoureux** que le second (cadre logique).

5. Quelle niche pour l'objet implication ?

Suivant le cadre dans lequel l'implication est présentée et suivant l'utilisation qui lui est destinée, les objets auxquels elle est reliée varient, nous pouvons les classer en trois grandes catégories. Evidemment les intersections entre ces catégories ne sont pas vides, certains manuels apparaissent à plusieurs reprises.

5.1. Dans le cours

Le concept d'implication peut-être relié :

- à des objets géométriques, dans des fiches ou des activités (H-4ème, N-4ème, I-2nde), *comment chercher en géométrie ?* (I-2nde)
- à des décimaux, au cours d'un *exemple de démonstration* (AC-4ème).

5.2. Cadre logique

Le concept d'implication peut–être relié :

- à la vérité d'une phrase (P-Deug, FU-Deug, LM-Deug)
- à d'autres connecteurs logiques (Non, Ou, Et...) (5 manuels de DEUG[28])
- aux quantificateurs (les mêmes 5 manuels de DEUG)

5.3. Cadre ensembliste

L'implication est reliée aux ensembles :

- elle est utilisée pour montrer des propriété des ensembles (3 manuels de DEUG, 1 de 4ème[29])
- elle est interprétée en termes ensemblistes (I-4ème, B-4ème), on trouve les titres : « *implication et inclusion »*(I-4ème) et « *interprétation ensembliste de l'inférence*» (B-4ème).[cf. §définition dans le cadre ensembliste]
- certains exemples sont exprimés en termes d'ensembles (I-4ème)

(I-4ème)

Exemple 2
« Dans N, si x est multiple de 5 alors x est terminé par 0 »
Cette phrase est une implication fausse car il existe des éléments possédant la première propriété mais ne possédant pas la seconde (songez à 5, 15, 25…).
Elle exprime aussi que « tout élément de M_5 est aussi élément de N_0[30], ce qui se traduit par : « $M_5 \subset N_0$ » ce qui est faux.
Les propositions :
« $(\forall x \in N)$ (x est multiple de 5 $\Rightarrow$ x est terminé par 0) » et « $M_5 \subset N_0$ » ont même valeur logique ; elles sont fausses toutes les deux.
[…]
Exercice :
a) Soit le référentiel F ={2, 3, 4, 5, 9} et les sous-ensembles :
P = {2, 3, 5} et I = {3, 5, 9}
«Dans F, si x est premier alors x est impair ».
Ecrivez symboliquement cette implication, quelle inclusion lui est associée ?
Quelle est la valeur logique des deux propositions obtenues ?
b) Soit Q l'ensemble des quadrilatères, C celui des carrés et R celui des rectangles.
« Dans Q, si x est un carré alors x est un rectangle »

---

[28] les manuels sont LFA-Deug, AF-Deug, ROD-Deug, C-Deug, LM-Deug
[29] les manuels sont LFA-Deug, AF-Deug, ROD-Deug, B-4ème
[30] On considère les sous ensembles de N :
$M_5 = \{ x, x \in N$, x est multiple de 5$\}$ et $N_0 = \{x, x \in N$, x est terminé par 0$\}$

Ecrivez symboliquement cette implication, quelle inclusion lui est associée ?
Quelle est la valeur logique des deux propositions ?

5.4. Cadre démonstratif, raisonnement

Le concept d'implication peut être alors relié aux termes de :

- réciproque, équivalence (7 manuels de 2nde, 1 manuel de DEUG[31])
- contraposée (2 manuels de 2nde, 6 manuels de DEUG[32])
- raisonnement par l'absurde (2 manuels de 2nde, 8 manuels de DEUG [33]) (Rappelons que C-Deug et Le-Deug confondent raisonnement par contraposée et raisonnement par l'absurde)
- raisonnement par récurrence (4 manuels de DEUG[34])
- raisonnement par disjonction des cas (LM-Deug, FU-Deug, B-2nde)
- par le terme de contre-exemple (1 manuel de 4ème, 5 manuels de 2nde [35], FU-Deug)
- connecteur "OU" (PM-2nde)

6. Quels ostensifs sont utilisés pour l'objet implication ?

6.1. L'équivalence

quatrième :	1/5	seconde :	0/7	DEUG :	0/9

AC-4ème ne parle que d'*équivalence*.

Pour les autres manuels, nous ne prendrons plus en compte les formes données à l'équivalence.

[31] les manuels sont F-2nde, B-2nde, T-2nde, I-2nde, P-2nde, D-2nde, PM-2nde, LM-Deug
[32] les manuels sont B-2nde, I-2nde, LFA-Deug, AF-Deug, ROD-Deug, LM-Deug, P-Deug, FU-Deug
[33] les manuels sont B-2nde, F-2nde, LFA-Deug, AF-Deug, ROD-Deug, LM-Deug, P-Deug, FU-Deug, C-Deug, Le-Deug
[34] les manuels sont LM-Deug, FU-Deug, P-Deug, Le-Deug
[35] les manuels sont B-4ème, T-2nde, B-2nde, F-2nde, P-2nde, D-2nde

6.2. Si...alors...

quatrième : 1/5	seconde : 5/7	DEUG : 0/9

L'implication est définie uniquement par l'expression

Si...alors...

ou parfois également par des expressions de synonymie immédiate telles que

P entraîne Q ; P implique Q (N-$4^{\text{ème}}$; F-2^{nde} ; B-2^{nde}; PM-2^{nde}; P-2^{nde})

Les manuels de seconde sont largement majoritaires dans cette catégorie, cela est cohérent avec le fait qu'ils sont nombreux à identifier l'implication mathématique à l'objet de la logique naturelle. De plus les programmes, en leur interdisant l'utilisation du symbole $\Rightarrow$ et tout exposé de logique, ils doivent se restreindre aux expressions les plus simples.

6.3. Le symbole $\Rightarrow$ associé à des expressions langagières

quatrième : 3/5	seconde : 2/7	DEUG : 3/9

En réalité, le manuel (B-$4^{\text{ème}}$) ne présente pas l'ostensif $\Rightarrow$ mais le remplace par l'ostensif $\vdash$ qu'il traduit par *entraîne* ou *infère*. Comme nous l'avons montré précédemment, cet ostensif $\vdash$ associé à l'inférence n'est pas logiquement équivalent à l'ostensif $\Rightarrow$ associé à l'implication, puisqu'il apporte l'information supplémentaire de la vérité de l'implication.

Cependant, ce symbole est défini et utilisé de la même façon que le symbole $\Rightarrow$ dans la plupart des autres manuels. De plus, le manuel donne pour l'équivalence définie peu après deux symboles $\vdash\!\dashv$ ou $\Leftrightarrow$, c'est pourquoi nous avons classé ce manuel dans cette catégorie.

Pour l'ensemble des manuels, les expressions langagières présentes sont :

Si...alors... (2 manuels de $4^{\text{ème}}$, 3 manuels de DEUG, 3 manuels de seconde[36])

P implique Q ; P entraîne Q (1 manuel de $4^{\text{ème}}$, 1 de DEUG, 3 manuels de 2^{nde}[37])

---

[36] les manuels sont H-$4^{\text{ème}}$, I-$4^{\text{ème}}$, LM-Deug, Le-Deug, L-Deug, D-2^{nde}, I-2^{nde}, T-2^{nde}

[37] les manuels sont B-$4^{\text{ème}}$, LM-Deug, D-2^{nde}, I-2^{nde}, T-2^{nde}

Q est une conséquence de P (T-2nde)

P a pour conséquence Q (B-4ème)

Condition nécessaire, condition suffisante (H-4ème, L-Deug)

P infère Q (B-4ème)

P donc Q (LM-Deug, I-2nde)

Il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie (T-2nde)

Lorsque P est vraie il en résulte que Q est vraie (B-4ème)

Ces dernières expressions « rabattent » l'implication sur le seul cas où A et B sont vraies. Nous avons déjà dit qu'elles pouvaient être les conséquences, nous les détaillerons dans le prochain chapitre.

D'autres expressions langagières sont proposées par (L-Deug) dans un exercice :

(L-Deug)

Compléter les exercices suivants de "P⇒Q" :
- implique
-si alors
-pour que il suffit que
-pour que il faut que
-une condition suffisante pour que est que
-une condition nécessaire pour que est que

Ce manuel proposera aussi en exercice la table de vérité de l'implication.

6.4. Divers symboles logiques associés à des expressions langagières

quatrième :	1/5	seconde :	0/7	DEUG :	6/9

En plus du symbole ⇒, on peut aussi trouver les ostensifs :

$\neg A \vee B$ *; Non A ou B* (6 manuels de DEUG[38])

Tables de vérité (4 manuels de DEUG[39])

Avec des expressions langagières telles que :

[38] les manuels sont : LFA-Deug, AF-Deug, ROD-Deug, C-Deug, P-Deug, FU-Deug
[39] les manuels sont : ROD-Deug, C-Deug, P-Deug, FU-Deug

P entraîne Q ; Q est conséquence de P ; Q résulte de P (C-Deug)

⇒ se lit "entraîne" ; La phrase "A⇒B" se lit aussi "si A, alors B" (P-Deug)

(P-Deug)

Pour que A soit vraie **il faut que** B soit vraie" correspond à A⇒B et non pas à B⇒A
[...]
Par contre, "pour que A soit vraie **il suffit que** B soit vraie" correspond à l'affirmation " B⇒A est vraie".
[...]
Une condition nécessaire pour que Q soit vraie est une proposition P telle que Q⇒P soit vraie. Une condition suffisante pour que Q soit vraie est une proposition P telle que P⇒Q soit vraie.

(FU-Deug)

Pour exprimer que P⇒Q est vraie, on peut, selon l'usage, utiliser l'une des expressions suivantes:
- P⇒Q
-P i**mplique** Q
-P **entraîne** Q
-**Si** on a P, **alors** on a Q
-Q est **conséquence*** de P
-Q est une **condition nécessaire** pour qu'on ait P
-Pour qu'on ait P, **il faut** (il est nécessaire) qu'on ait Q
-P est une **condition suffisante**** pour qu'on ait Q
-Pour qu'on ait Q, i**l suffit** (il est suffisant) qu'on ait P.

* conséquence au sens mathématique, pas au sens ordinaire.
** Un critère est une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'une propriété mathématique soit vraie ; il fournit, dans certains cas, une règle pratique de vérification de cette propriété (par exemple, un critère de convergence d'une suite numérique).

on prendra garde de ne pas confondre ⇒ avec "alors" ou avec "donc"

Les quatre manuels (B-4ème, LFA-Deug, AF-Deug et ROD-Deug) n'utilisent, en plus des symboles, que l'expression *implique* et aucune autre expression langagière. Cependant, dans le texte, nous remarquons des phrases qui sont des implications ou des équivalences en langue naturelle mais qui ne sont pas utilisées comme des implications ou équivalences mathématiques :

(B-4ème)

Pour qu'elle (l'implication) existe, il suffit de prouver que lorsque p est vraie, il en résulte que q est vraie
[…]
Si le théorème [...] existe, alors on peut dire [...]

(AF-Deug)

A est fausse ssi[40] (non A) est vraie
[…]
Si A est vraie et si A ⇒ B est vraie, alors B est vraie

(ROD-Deug)

Si A est une assertion fausse, alors A ⇒ B est une assertion vraie

(LFA-Deug)

Si A et (A ⇒ B) sont vraies, B est vraie

[40] Ecrit de cette façon dans le texte.

> […]
> A et B sont équivalentes si (A ⇒ B) et (B ⇒ A) sont vraies

Les expressions traduisant l'implication sont donc déjà présentes dans la langue naturelle. La compréhension du concept de la logique naturelle est censée aller de soi mais rien ne permet un lien avec le concept mathématique que le manuel définit. Pour définir le concept mathématique d'implication on utilise les expressions langagières associées au concept naturel sans les avoir définies. Et, de plus, ces expressions langagières seront, pour certaines (*si…alors*, *équivalentes*, *il suffit que…*), les mêmes que celles qui peuvent être utilisées en langage mathématique pour traduire le concept mathématique. Cependant, non seulement le concept mathématique n'est pas identifiable au concept naturel, mais de plus des expressions telles que *il suffit que…pour que…* ou tout simplement *A si B* ont un sens précis en mathématiques alors que leur signification peut varier, selon le contexte, en langue naturelle. C'est là une grande difficulté liée au concept d'implication, et même un paradoxe que nous avons déjà décrit dans notre analyse épistémologique. Nous voyons, ici, que les manuels n'échappent pas à ce « cercle vicieux » : il faut définir l'objet mathématique, modélisation de l'objet naturel, à l'aide de l'objet naturel, celui-ci étant caractérisé par des expressions de la langue naturelle dont la signification peut être discutée selon le contexte.

En particulier, la dernière phrase du manuel (LFA-Deug) mérite notre attention. C'est une définition du mot *équivalente*. En tant que définition, c'est justement une équivalence naturelle entre les deux parties de la phrase qui devrait s'écrire *si et seulement si*. Il est donc nécessaire d'utiliser l'équivalence naturelle pour définir l'équivalence mathématique. Mais, la pratique mathématique courante, fait que, comme ici, on utilise en général l'implication naturelle *A si B* et non pas l'équivalence naturelle *A si et seulement si B* lorsqu'on définit un concept mathématique. La pratique mathématique se permet donc, d'utiliser le concept naturel d'implication *A si B* avec la signification du concept naturel d'équivalence *A si et seulement si B*, ce qu'elle n'autorise évidemment jamais avec les concepts mathématiques !

A propos des symboles utilisés, nous faisons le constat que le symbole logique ⊃, utilisé parfois à la place de ⇒, n'apparaît jamais dans nos manuels. Notre hypothèse est que les manuels cherchent à éviter toute confusion avec le symbole d'inclusion. Ceci d'autant plus que la plupart des manuels donnant des définitions de logique sont aussi ceux qui utilisent l'implication pour définir l'inclusion.

Les expressions langagières associées à l'implication varient beaucoup d'un manuel à l'autre. Certains n'utilisent que *implique*, d'autres ne donnent que des traductions de synonymie immédiate telles que *entraîne*, *est la conséquence de*, d'autres encore proposent des expressions langagières variées. Après ce recensement des expressions nous pouvons faire quelques constats.

L'expression *Si...alors...* est prédominante. En revanche, les expressions *P donc Q*, *Q résulte de P* et *Q conséquence de P* sont les moins présentes.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, la première expression connote la vérité de P et Q. Plusieurs manuels insistent d'ailleurs sur la différence entre *P implique Q* et *P donc Q*, il est donc normal de ne pas la trouver comme expression synonyme.

Pour les deux dernières expressions, *Q résulte de P* et *Q conséquence de P*, notre hypothèse est qu'elles ne sont pas proposées par la plupart des manuels en raison de l'ordre dans lequel sont mentionnés P et Q. En effet, dans ces deux expressions la *conclusion* se trouve après *l'hypothèse*, ce qui est contraire à l'habitude et, en particulier, contraire à l'utilisation de *si...alors...*, cette nouvelle tournure peut rendre plus difficile la reconnaissance de l'*hypothèse* et de la *conclusion*. Cette difficulté peut être éclairée par la notion d'*énoncés congruents* explicitée par R. Duval [Duval R., 1988 et 1995] puis reprise par V. Durand-Guerrier. R. Duval propose un facteur de *non congruence* entre énoncés lié à l'ordre d'occurence :

> *Deux ordres indépendants d'occurrences des unités mises en correspondances, pour une même unité apophantique*[41]*, dans les expressions de chaque registre.*
> *[Duval R., 1995, p.151]*

V. Durand-Guerrier reprend ce facteur de congruence ou non congruence dans le cas de l'énoncé formalisé de l'implication P $\Rightarrow$ Q. Elle distingue ainsi les énoncés qui lui sont *référentiellement équivalents et congruents (respectant l'ordre des occurrences des lettres P et Q)*, comme par exemple *Si P alors Q* ou *P entraîne Q*, les énoncés qui lui sont *référentiellement équivalents mais non congruents (ne respectant pas l'ordre des occurrences des lettres P et Q)*, comme *Q est conséquence de P* ou *Q résulte de P*, et enfin les *énoncés congruents et non référentiellement équivalents*, comme *P est une condition nécessaire pour Q* ou *P si Q* [Durand-Guerrier, 1996, p. 165].

Cependant, comme le dit V. Durand-Guerrier, les expressions *pour que Q il suffit que P* et *Q est condition nécessaire pour P* sont, de la même façon, *non congruentes avec l'énoncé P $\Rightarrow$ Q* [ibid., p.165] et sont pourtant plus présentes. La signification mathématique de ces dernières est peut-être jugée plus indispensable.

Les deux expressions *pour que...il faut que*, *pour que...il suffit que...* et respectivement les deux expressions *...est une condition nécessaire pour...* ; *...est une condition suffisante pour...* ne sont jamais séparées l'une de l'autre dans les manuels étudiés.

Enfin, l'expression *P seulement si Q* n'est jamais donnée. Notre hypothèse est que cette absence s'explique par la trop grande différence entre la signification mathématique de cette expression et sa signification dans la langue naturelle. En effet, l'utilisation de cette expression est ambiguë, dans la logique naturelle, on la confond souvent avec les expressions *P si Q* ou *P si et seulement si Q*. Nous avons déjà développé, dans notre étude épistémologique (chap. 1, § 1.1.1), l'exemple « *demain, je t'emmènerai à la piscine s'il fait beau* » pour montrer la confusion entre les formulations

[41] « Se dit d'un énoncé qui peut être dit vrai ou faux », définition du petit Larousse 2003 citée par nous.

si et *seulement si*. Nous allons montrer maintenant sur un deuxième exemple l'identification de l'expression *seulement si* avec l'expression *si et seulement si*.

Lorsque l'on dit à un enfant : « *tu auras ce bonbon(P) seulement si tu restes sage(Q)* » cela se traduit mathématiquement par $P \Rightarrow Q$. L'enfant comprend, lui, non seulement qu'il est nécessaire qu'il reste sage (i.e. *Q condition nécessaire pour* P ou encore $P \Rightarrow Q$), mais qu'en plus suffit qu'il reste sage pour avoir ce bonbon c'est-à-dire que *Q est suffisant pour* P ou encore que $Q \Rightarrow P$. Finalement, l'implication de la phrase de départ $P \Rightarrow Q$ est comprise comme une équivalence $P \Leftrightarrow Q$ et l'enfant verrait une injustice s'il ne recevait pas le bonbon alors qu'il a été sage.

Nous voyons donc la confusion qui est faite entre les trois expressions *si* ; *seulement si* ; *si* et *seulement si* dans la langue naturelle. Ceci est évidemment susceptible d'entraîner beaucoup d'erreurs dans leur utilisation mathématique, c'est probablement pourquoi l'expression *seulement si* est absente des manuels.

7. Quelques conclusions

Pour conclure cette analyse écologique du concept d'implication, nous voulons souligner quelques résultats.

- **Identification à la logique naturelle.**

Les manuels de seconde issus des programmes 2000 ne prennent pas en charge la définition de l'implication, il y a une identification du concept mathématique à celui de la logique naturelle.

- **Prépondérance du point de vue déductif**

Le point de vue déductif est prépondérant notamment en collège et lycée où il est l'unique point de vue présenté. En DEUG, il est présenté pour définir des typologies de raisonnements : par contraposée, par l'absurde, par récurrence...

- **Causalité et temporalité**

La conception causale de l'implication[42], déjà présente dans la logique naturelle, est renforcée dans les manuels par de nombreuses expressions, souvent dans le cadre du raisonnement déductif.

- **Le point de vue ensembliste est quasiment absent**

Aucun manuel de DEUG ou de seconde n'utilise ce cadre pour l'implication. Même dans les chapitres de théorie des ensembles des manuels de DEUG, seule la phrase suivante fait le lien avec les ensembles :

A inclus dans B si pour tout x, $x \in A \Rightarrow x \in B$

Dans les manuels de quatrième, (I-4ème) et (B-4ème) donnent une interprétation ensembliste de l'implication. Cependant, (B-4ème) ne donne aucun exemple ou exercice qui permette de donner un sens concret à cette interprétation.

Quant à (I-4ème), il met en relation inclusion et implication dans ses exercices, mais il utilise les ensembles plus pour représenter les implications qu'en tant qu'outil.

- **Il y a un cloisonnement des points de vue**

Les manuels définissent l'implication de façon différente suivant l'utilisation que les auteurs comptent en faire. En particulier, les ouvrages qui se concentrent sur l'utilisation de l'implication dans la démonstration se placent plutôt dans le cadre du raisonnement déductif, alors que, les manuels qui veulent l'utiliser dans le cadre de la théorie des ensembles se placent plutôt dans le cadre de la logique formelle. Mis à part dans certains manuels de DEUG (par exemple FU-Deug et P-Deug), dont nous avons pu lire les commentaires (cf. § *Dans quel objectif l'objet implication est-il introduit ?*), ces deux points de vue ne sont jamais mis en relation.

[42] Ce sont toutes les pratiques associées à l'interprétation de $A \Rightarrow B$ par *A est la cause de B*. Cette conception sera détaillée dans le prochain chapitre.