Chapitre 3

Travaux didactiques sur l'implication

Nous rapportons dans cette partie quelques travaux didactiques sur l'implication, en particulier dans le cadre logique, et la démonstration en général qui nous ont paru pertinents pour positionner notre recherche. Nous détaillerons quelques aspects des travaux de V. Durand-Guerrier, M. et J. Rogalski, J. Rolland, M. Legrand, R. Duval et N. Balacheff, que nous avons déjà eu l'occasion de citer pour la plupart. Nous montrerons comment notre recherche s'appuie sur certains résultats pour étudier de nouveaux aspects de l'implication. Enfin, nous présenterons nos premiers travaux de recherche, en partie issus de notre mémoire de DEA, et leurs résultats en termes de conceptions et de propriétés-en-acte sur l'implication.

1. Regard sur quelques travaux didactiques

1.1. V. Durand-Guerrier : *les énoncés contingents sont nécessaires*

Dans sa thèse, V. Durand-Guerrier [Durand-Guerrier V., 1996] défend la *pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*[43]. Elle développe dans son premier chapitre une analyse épistémologique et historique de la *notion d'implication*. Elle montre, en particulier, la difficulté d'émergence de ce concept et les nombreuses significations, comme par exemple l'implication *matérielle* ou l'implication *formelle*, qui lui sont données selon les auteurs de l'antiquité jusqu'à nos jours.

> *Ce qui apparaît au fil des textes, c'est d'une part la difficulté de l'émergence de ce concept et, en particulier, la multiplicité des notions qu'il recouvre, et d'autre part, le souci de clarification conceptuelle qui anime les différents auteurs qui se sont attachés à le construire.*
> *[Durand-Guerrier V., 1996, p. 96]*

Elle montre aussi dans ce chapitre comment les différents auteurs ont dû construire l'implication mathématique en se basant sur le raisonnement naturel sans pouvoir, cependant, en rendre totalement compte.

> *On a vu que, pour construire leurs systèmes, les auteurs ont dû dans une large mesure se détacher de l'usage courant et de certains modes spontanés de raisonnement ; pour autant, il ne s'agit pas pour eux de construire des systèmes arbitraires mais bien de chercher à régler cette tension inhérente à un système formel qui a ses règles autonomes de fonctionnement mais qui vise à rendre compte du mieux possible de ce que seraient les raisonnements d'un sujet humain rationnel.*
> *[Durand-Guerrier V., 1996, p. 96]*

C'est ainsi que, dans notre analyse épistémologique, nous avons présenté **l'implication mathématique comme un modèle de l'implication naturelle**, la première devant rester fidèle à la seconde dans les limites des règles de la logique formelle.

V. Durand-Guerrier soutient la thèse que la logique des propositions ne permet pas de problématiser l'implication, et en particulier la quantification, contrairement à la logique des prédicats.

> *[…] contrairement à ce qu'affirme Piaget, la logique des propositions ne permet pas de prendre en compte de manière satisfaisante les questions liées à la quantification, et ceci parce que lorsque l'on modélise les énoncés du langage courant dans le calcul des propositions, on évacue la nature des objets et leurs qualités.*
> *[Durand-Guerrier V., 1996, p. 96]*

---

[43] Titre complet de sa thèse : logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.

> *La logique de référence pertinente, pour l'activité mathématique d'une part, et pour l'analyse des tâches censées mesurer les aptitudes au raisonnement des sujets d'autres part, est la logique des prédicats.*
> *[Durand-Guerrier V., 1996]*

Dans l'étude de la tâche *Labyrinthe*, reprise dans [Durand-Guerrier, 1999], elle montre comment la quantification universelle implicite des implications, naturelle pour les praticiens des mathématiques et en l'occurrence pour les professeurs de mathématiques, n'est pas partagée par les élèves et peut amener des divergences dans le traitement des implications. Elle met en avant la nécessité de redonner une place aux énoncés contingents dans la classe de mathématique.

> *La position dogmatique qui consiste à considérer qu'il n'existe qu'une seule catégorie d'énoncés conditionnels dans la classe de mathématiques, et que pour tout énoncé mathématique on peut trancher de manière radicale entre le vrai[44] et le faux peut, et selon moi doit, être abandonnée au profit d'une position plus pragmatique consistant à laisser vivre dans la classe, sous certaines conditions, des énoncés contingents.*
> *[Durand-Guerrier V., 1999, p. 78]*

Pour notre recherche, nous retenons la pertinence du calcul des prédicats pour la problématisation de l'implication. Par rapport à notre analyse épistémologique, les prédicats sont à l'intersection du cadre de la logique formelle et du cadre ensembliste. Nous interprétons son travail sur la quantification universelle comme une certaine prise en compte du point de vue ensembliste dans le cadre de la logique. C'est pourquoi nous nous attachons nous-même à montrer la pertinence du cadre ensembliste en particulier et la nécessité de faire les liens entre les différents cadres en général. Cependant, le point de vue ensembliste est, pour nous, plus vaste. En particulier, lorsque l'on regarde l'implication universellement quantifiée $\forall x \in A, (P(x) \Rightarrow Q(x))$, on manipule x dans l'ensemble A et l'on exprime le fait que x parcourt A, alors que lorsqu'on travaille sous un point de vue ensembliste, c'est la classe A que l'on manipule. En particulier, dans le premier cas, on se pose la question de la validité de l'implication sur A alors que dans le second cas on s'interroge aussi sur la validité de l'implication dans une classe plus grande ou une classe plus petite que A.

Dans le chapitre 3 de sa thèse, après avoir fait référence aux problèmes de congruences soulevés par R. Duval et que nous avons rapportés dans le chapitre précédent, V. Durand-Guerrier propose une définition de condition nécessaire et condition suffisante à l'aide d'une implication universellement quantifiée.

> *Définition : Étant donné deux propriétés P et Q s'appliquant aux mêmes objets d'un ensemble donné, on dira que P est une condition suffisante[45] pour Q et que Q est une condition nécessaire pour P lorsque tout objet possédant la propriété P possède également la propriété Q, autrement dit, si la proposition « $\forall x$, ($P(x) \Rightarrow Q(x)$) » est vraie.*
> *[Durand-Guerrier V., 1999, p. 167]*

[44] souligné dans le texte
[45] souligné dans le texte

Elle justifie cette définition par l'analyse des définitions et exemples donnés par le dictionnaire des mathématiques :

> *Condition nécessaire : Si la proposition P $\Rightarrow$ Q est vraie, on dit que la proposition Q est une condition nécessaire pour que la proposition P soit vraie. Une condition nécessaire pour qu'un entier différent de 2 soit premier est qu'il soit impair ; cette condition n'est pas suffisante : le nombre impair 9 n'est pas premier.*
> *Condition suffisante : Si la proposition P $\Rightarrow$ Q est vraie, on dit que la proposition P est une condition suffisante pour que la proposition Q soit vraie. Une condition suffisante pour qu'un nombre soit divisible par 5 est que l'écriture en base dix de ce nombre se termine par un zéro. Cette condition n'est évidemment pas nécessaire : 15 ne se termine pas par 0 et pourtant 15 est divisible par 5.*
> *[Bouvier A., George M., Le lionnais F., 1983]*
> *Ceci [c'est-à-dire les définitions et exemples précédents] selon nous met en évidence le fait suivant : bien que les notions de condition nécessaire et de condition suffisante soient généralement associées à la notion d'implication entre propositions, il est clair que celles-ci sont en fait reliées à la notion d'implication formelle comme le montrent les deux exemples proposés qui renvoient explicitement à un énoncé de la forme $\forall$ x, (P(x) $\Rightarrow$ Q(x))*
> *[Durand-Guerrier V., 1999, p. 167]*

La définition proposée par V. Durand-Guerrier pour la condition nécessaire et la condition suffisante est très proche de celle que nous avons proposée dans le cadre ensembliste lors de notre analyse épistémologique :

> Soit *A* (resp. *B*) l'ensemble dont les éléments vérifient la propriété A (resp. B).
> On dit que A *est une condition suffisante pour* B et B *une condition nécessaire pour* A lorsque *A* est inclus dans *B*.

En effet, cette définition est basée sur une inclusion d'ensembles, c'est-à-dire sur l' implication universellement quantifiée $\forall$ x, (A(x) $\Rightarrow$ B(x)). Ceci appuie le fait que, pour notre recherche, le cadre ensembliste est le lieu privilégié de l'utilisation des énoncés contingents et des prédicats.

1.2. J. & M. Rogalski : *des « profils » d'étudiants par rapport à l'implication*

J. et M. Rogalski ont récemment travaillé sur l'implication avec un public de PLC1 [Rogalski J., Rogalski M., 2004]. Non seulement leur problématique est proche de la nôtre mais les publics sont également très semblables puisque les PLC2 que nous avons mis en situation ont été des PLC1 l'année précédente.

L'objectif de leur article *contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques* [ibid.] est d'identifier des types de structuration de l'usage de la logique lors de l'évaluation de la validité d'implications. Pour cela, à partir d'expérimentations avec des PLC1 (environ 200 étudiants sur les deux années 1999 et 2001), ils définissent une typologie de profils basée sur les réponses concernant des implications non calculables à prémisses toujours fausses, issue par exemple de l'activité Circuit [Legrand M., 2001] ou du Labyrinthe [Durand-Guerrier, 1999].

Comme la nôtre, leur expérimentation se veut formative et ils expliquent l'intérêt de cette formation pour les futurs professeurs :

> *La motivation de l'étude réside pour nous dans l'importance, pour des enseignants de mathématiques en collèges ou lycées, de savoir distinguer dans les "erreurs de raisonnement" des élèves celles qui proviennent directement de la mauvaise compréhension des mathématiques enseignées, et celles qui sont liées à un maniement erroné de la logique en œuvre en mathématiques (par exemple, un certain nombre d'élèves et d'étudiants pensent spontanément, en actes, que $P \Rightarrow Q$ et non $P \Rightarrow$ non Q, « c'est pareil », ou que la négation — souvent d'ailleurs dénommée « contraire » — de $\forall x\ P(x)$ est $\forall x$ non $P(x)$, ou distinguent mal une implication et sa réciproque « dire $P \Rightarrow Q$ et dire $Q \Rightarrow P$ c'est dire la même chose »). L'origine de ces erreurs est souvent plus cachée, et nous faisons l'hypothèse que les enseignants ne seront vraiment aptes à les détecter et à proposer des remédiations éventuelles que si eux-mêmes ont des idées claires sur le sujet (cf. Durand-Guerrier, 1996 ; Durand-Guerrier et al., 2000).*
> *[Rogalski J., Rogalski M., 2004, p.175]*

Nous partageons l'avis de J. & M. Rogalski et V. Durand-Guerrier qui consiste à dire que l'implication n'est pas un objet transparent [Durand-Guerrier V., 1996, p. 406] et qu'il est nécessaire que les professeurs de mathématiques aient des connaissances « solides » pour pouvoir enseigner l'implication. A ce propos, V. Durand-Guerrier [ibid., p. 407] affirme *qu'un enseignant de mathématique [ne peut] se passer de connaissances en logique* et qu'il faut *qu'il ait une connaissance idoine de [l'implication], faute de quoi il risque de ne pas comprendre ce qui se joue devant lui*. Nous prolongeons ceci en affirmant qu'il est nécessaire, non seulement de connaître l'implication dans le cadre logique, mais encore d'établir les liens avec l'implication dans le cadre ensembliste et dans le cadre du raisonnement déductif.

J. et M. Rogalski justifient le choix qu'ils ont fait de distinguer des profils à partir de réponse à des implications à *prémisse fausse* ainsi :

> *Pourquoi nous intéressons-nous à cet aspect ? Nous avançons plusieurs raisons.*
> *(1) La situation de l'implication à hypothèse fausse est à peu près la seule qui met fortement en évidence le saut qualitatif entre d'une part une certaine logique usuelle, naturelle, en mathématique, où l'on se contente souvent de déduire une propriété universellement vraie d'une autre, en utilisant une implication dont l'hypothèse est donc, par l'objectif même qui est visé, vraie, et d'autre part une logique formelle dont la nécessité intervient de façon plus cachée en mathématiques, au point que souvent les étudiants ne se rendent pas compte qu'elle y est plus qu'on ne le pense à l'œuvre.*
> *(2) La deuxième raison est que justement cet aspect formel de la logique est plus présent qu'on ne le pense dans les mathématiques courantes. Donnons-en quelques exemples.*
> *(*) D'abord, la véracité de $P \Rightarrow Q$ quand P est fausse est nécessaire à la cohérence des raisonnements, en particulier dans les raisonnements par contraposition ou par l'absurde[…] (*) De plus, les modes usuels de recherche d'une preuve utilisent souvent des conditions suffisantes : « pour prouver Q, il suffirait qu'on ait P, car $P \Rightarrow Q$ » : alors même qu'on ne sait pas encore que P est vraie […]*
> *(*) Dans certaines preuves par récurrence, il peut être facile de montrer que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, sans savoir si P_0 est vraie, ou P_1, … et c'est parfois à partir d'un n assez grand que cela va marcher. Là encore, il faut être sûr de la véracité de l'implication, même si P_n est (éventuellement) fausse. C'est d'ailleurs exactement ce qui se passe dans l'un des items proposés dans nos tests. […]*

> *(*) Il y a des cas où la seule preuve connue de A consiste à montrer que nonA $\Rightarrow$ A (c'est le cas d'un pas indispensable dans la preuve — pourtant très élémentaire quant aux connaissances mathématiques en jeu — du théorème de Cantor : il n'y a pas de surjection de X sur P(X)).*
> *Il ne nous paraît donc pas sans objet d'étudier chez de futurs enseignants le fonctionnement de l'implication à hypothèse fausse. Nous verrons d'ailleurs dans cette étude à quel point un nombre important d'étudiants sont déstabilisés lorsqu'ils prennent conscience que dans l'implication universelle « $\forall x\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ » il peut y avoir des x pour lesquels P(x) est fausse.*
> *[Rogalski J., Rogalski M., 2004]*

Nous avons, nous-même, montré comment l'écrasement de l'implication $P \Rightarrow Q$ sur P vrai $\Rightarrow$ Q vrai pouvait être à l'origine de nombreuses erreurs. Notre première expérimentation [Deloustal V., 1999, cf. §2] comportait d'ailleurs des implications à prémisses fausses, certaines telles que P et Q ne soient pas reliés sémantiquement, contrairement à J. & M. Rogalski qui n'ont *pas proposé d'implications où il n'y aurait aucun lien de sens entre P et Q* [ibid.].

Parmi les implications à prémisses fausses proposées, ils distinguent différentes *catégories <u>prenant explicitement en compte les contenus mathématiques ou non mathématiques</u>[46], tant des assertions en jeu que des modes de validation possibles.*

> *(*) les implications «* calculables *», à des degrés variés (et donc à contenu mathématique) : « $H_n \Rightarrow H_{n+1}$ », « si 1=2... », « si $(x^2+1) \leq 0$ », les deux items à contenu polynomial ;*
> *(*) les implications «* arbitraires *», correspondant à la définition d'une « règle » (en général non mathématique) : « Wason », « Radford » ;*
> *(*) les implications de «* contrat social *» : « les bonbons de la maîtresse » ;*
> *(*) les implications «* factuelles *»,* non calculables*, où les assertions P et Q (hypothèse et conclusion) sont des données immédiatement saisissables par le sujet, pratiquement sensibles, et qui peuvent éventuellement être à contenus mathématiques « routiniers » pour les sujets : « Triangle », « Circuit », « Labyrinthe ».*
> *[Rogalski J., Rogalski M., 2004]*

Dans cette dernière catégorie, il nous semble reconnaître ce que nous appelons des objets *faciles d'accès*, le terme *routinier* regroupant probablement ce que nous appellerons, dans la suite, des objets « très » *institutionnels*. Nous verrons au prochain chapitre, que ce choix de variable sur le « niveau » des contenus mathématiques (implications *calculables* / implications *factuelles*) est en fait, pour nous, une contrainte : **nous faisons l'hypothèse que pour repérer des erreurs dues à l'implication il faut des objets *faciles d'accès*.**

J. & M. Rogalski semblent aussi adopter cette hypothèse puisque c'est sur les réponses à ces implications *factuelles* qu'ils vont construire leurs « profils », justifiant ce choix ainsi :

> *Le choix de ces items comme permettant de tester ces profils repose sur leur aspect factuel ou « matériel », leur immédiate intelligibilité par les sujets, l'absence de référence à des connaissances mathématiques non immédiates, non routinisées, et la non-calculabilité de l'implication.*
> *[Rogalski J., Rogalski M., 2004]*

[46] souligné dans le texte

J. & M. Rogalski formulent deux hypothèses. La première est que l'on *peut avoir accès aux schèmes d'utilisation de l'implication présents et aux effets de ces schèmes en dépouillant les réponses des étudiants à des items qui, soit sont des questions de validation d'implications dont l'hypothèse est toujours fausse, soit attirent l'attention des sujets sur la valeur de la ou des variables qui rendent fausse l'hypothèse — les « hors-sujet » de M. Legrand (1990).* Leur *seconde hypothèse, pour le dépouillement, est qu'on peut détecter l'éventail des structurations des modes de validation de l'implication par l'étude des conjonctions de réponses* [aux différents types d'implication rapportés ci-dessus] *dans plusieurs items.*

Sur la base des réponses aux implications factuelles, ils classent les 107 sujets selon quatre profils de comportement :

> *(*)* **logique** *(19 sujets) (réponse du type : «* l'implication est vraie » —en général avec l'argument « parce que l'hypothèse est fausse »*) ;*
> *(*)* **pertinent** *(23 sujets) (réponse du type : «* l'implication est stupide », « elle n'a pas de sens »*);*
> *(*)* **non conditionnel** *(45 sujets) (réponse du type : «* l'assertion est fausse car l'hypothèse est fausse »*) ;*
> *(*)* **sans dominante** *(20 sujets) (tous les autres types de réponses ou de distribution de réponse, incluant les non-réponses éventuelles).*
> *Le terme « non conditionnel » est choisi pour rendre compte du fait que ces étudiants ne conçoivent pas la vérité de l'implication comme un lien conditionnel entre les valeurs de vérité des propositions.*
> *[Rogalski J., Rogalski M., 2004]*

Des « sous profils » sont définis dans les trois premiers cas, *logique instable* (9 sujets), *pertinent instable* (14 sujets) et *non conditionnel instable* (23 sujets), lorsque les sujets se comportent selon le profil concerné dans seulement deux items sur 3.

J. & M. Rogalski montrent alors la pertinence de cette typologie des profils comme moyen de prédiction statistique au succès ou à l'échec des autres items.

> *• Les profils « logique » et « pertinent » apparaissent l'un et l'autre globalement efficaces lorsqu'il s'agit de produire des inférences habituelles (calculer le passage de P(x) vraie à Q(x) vraie), comme dans les évaluations d'implications quand on se place dans le cas où P(x) est vraie et qu'on ignore le cas où P(x) est fausse, c'est-à-dire les « hors-sujet ».*
> *• Les profils « pertinent » sont beaucoup moins stables dans la donnée de réponses correctes pour les implications calculables : ils sont déstabilisés par la mise en évidence du caractère non vérifié de la prémisse de l'implication, et ils sont assez peu cohérents dans la donnée de réponses correctes à des items voisins. En revanche, ils sont cohérents dans leur réponse à l'item de contrat social (« les bonbons de la maîtresse ») où ils construisent le plus souvent un scénario qui rend l'hypothèse vraie, « sauvant » ainsi le contrat posé par la maîtresse.*
> *• Les profils « non conditionnel » (l'implication est fausse quand l'hypothèse est (toujours) fausse) sont ceux qui évaluent le plus de manière erronée les implications fausses même calculables (moins de 30 % de réponses correctes pour les items pris individuellement, et autour de 10 % pour le traitement des hors-sujet).*
> *• Les sujets « sans dominante » se situent —en ce qui concerne les réponses correctes—de façon voisine des sujets à profil « non conditionnel » ou à profil « pertinent », selon les items.*
> *Les contrastes les plus forts entre profils se manifestent quand on considère la cohérence de réponses correctes à des items de même classe portant sur un contenu mathématique : implications calculables à hypothèse visiblement fausse, traitement des "hors sujet", cohérence qui est la plus forte pour les profils "logique" et "pertinent", et la plus faible pour "non conditionnel".*
> *[Rogalski J., Rogalski M., 2004]*

Cette typologie des « profils » est très proche de certaines propriétés-en-acte que nous avions définies dans notre première expérimentation [Deloustal V., 1999] et que nous détaillerons dans le prochain paragraphe. En particulier, dans le cas de la prémisse fausse, nous avions distingué plusieurs propriétés-en-acte :

(P1) : « A implique B » n'a d'utilité (et/ou de sens) que lorsque A est vraie.
(P4a) : Si A est fausse, « A implique B » est vraie.
(P4b) : Si A est fausse, « A implique B » est fausse

Les propriétés-en-acte (P1), (P4a) et (P4b) sont respectivement utilisées par les sujets ayant un profil *pertinent*, *logique* et *non-conditionnel*. Cependant, nous avons montré dans nos travaux que **différentes propriétés-en-acte pouvaient cohabiter chez un même sujet**. Un même sujet pouvant « passer » d'une « conception » à l'autre. Or J. & M. Rogalski proposent une partition des sujets selon le profil auquel ils appartiennent, les sujets sont classés dans le profil auquel la majorité de leurs réponses sont conformes. Il semble qu'il n'y ait pas de place pour des sujets pouvant appartenir à plusieurs profils, même si la définition des trois sous-profils « instables » va dans ce sens. Cette typologie ne permet pas de prendre en compte ceux qui n'utilisent pas toujours des propriétés-en-acte relevant d'un même profil, dès lors la prédiction du succès ou de l'échec à la réponse concernant d'autres implications paraît difficile pour ces sujets-là.

1.3. J. Rolland : *modélisation / condition nécessaire et condition suffisante*

J. Rolland [Rolland J., 1999] s'est, avant tout, posé la question de la *modélisation*, ce qui l'a obligé à étudier le rapport entre modélisation et *implication* dans sa thèse intitulée *pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication*. En effet, lors de la modélisation d'un problème, il y a une perte d'informations. Le modèle utilisé n'est pas équivalent à la situation de départ, le lien entre modèle et situation s'exprime simplement par une implication. Après avoir résolu le problème mathématique dans le modèle il faut donc revenir à la situation de départ en faisant attention au sens ($\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$) des implications. Il a donc cherché à montrer en quoi un travail sur la modélisation peut permettre de problématiser la différence entre condition nécessaire et condition suffisante.

Les résultats de son expérimentation en DEUG A montrent que *les rapports personnels qu'entretiennent certains acteurs de l'institution « personnes ayant reçu une formation supérieure en mathématiques » à la modélisation et à l'implication* ne sont pas conformes à ceux de *l'institution mathématicienne* [ibid. p. 301].

> *Nous avons mis à jour un rapport à la modélisation caractérisé par :*
> *- l'importance accordée à la règle dite du maximum d'information qui veut que l'ensemble des renseignements fourni par l'énoncé soit nécessaire et suffisante pour sa résolution.*
> *- le fait qu'il n'y a pas de contrôle sémantique de l'adéquation entre le problème et son modèle. Ce contrôle*

> *étant remplacé par la reconnaissance de marqueurs langagiers qui, à eux seuls, assurent la pertinence du modèle.*
> *Concernant la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, nous pouvons relever les faits suivants :*
> *- […] de manière générale une confusion entre nécessaire et suffisant.*
> *- le fait qu'un exemple suffit à valider une preuve alors qu'un contre-exemple ne suffit pas toujours à l'invalider.*
> *- une conception de la condition nécessaire comme condition suffisante minimale.*
> *[Rolland J., 1999, p.301-302]*

J. Rolland exprime cette conception lors de l'analyse des réponses à sa question : *donner une condition suffisante qui ne soit pas nécessaire, puis une condition nécessaire qui ne soit pas suffisante* (p. 216). Les réponses en langage courant sont pour la plupart difficiles à traiter car *les différentes interprétations possibles ne favorisent pas l'analyse* (p.223), les réponses donnant des exemples mathématiques apportent, elles, un résultat intéressant.

> *Quant aux erreurs relevées dans les exemples issus des mathématiques, elles vont toutes dans le même sens (5 erreurs sur 8 exemples mathématiques) et mettent en jeu le sens que peuvent prendre « suffisant » et « nécessaire ». Les réponses sont alors globalement toutes du même type et peuvent être illustrées par celle-ci.*
> *« Un parallélogramme qui a deux angles droits est un rectangle. La condition est suffisante mais pas nécessaire. En effet, un seul angle droit suffit. »*
> *[…] l'hypothèse que nous retiendrons [est qu'il s'agit-là d'] une conception de la condition nécessaire comme condition suffisante « minimale ».*
> *Regardons l'exemple proposé, il y a équivalence entre la classe des « parallélogrammes avec un angle droit » et des « parallélogrammes avec deux angles droits ». Pourtant, le fait de rajouter qu'il y ait un second angle droit est considéré comme une information supplémentaire qui ne permet plus à la condition « parallélogramme avec deux angles droits » d'être vue comme nécessaire. Une condition nécessaire apparaît donc ici comme une condition suffisante qui contiendrait un minimum d'informations. Cette conception peut être le révélateur d'une difficulté à gérer les informations et aussi l'occasion de montrer à nouveau l'intérêt de la quantification. Quantifier les objets impose de revenir à une définition des classes d'objets et, en raisonnant en termes de classe, donne une nouvelle lisibilité à l'équivalence entre « parallélogramme avec un angle droit » et « parallélogramme avec deux angles droits ». Ce qui peut être un indice de la pertinence d'un point de vue ensembliste de l'implication qui nécessite la gestion de l'information, la définition de classes d'objets et par voie de conséquence la problématisation de la quantification.*
> *[Rolland J., 1999, p.224-225]*

J. Rolland ne développe pas ce qu'il appelle *point de vue ensembliste de l'implication* mais nous avons toutes les raisons de croire qu'il s'agit de celui que nous avons essayé de définir dans notre premier chapitre. Nous tenons donc la même position que lui sur la pertinence de ce point de vue pour la problématisation de la quantification et de l'implication en général. **Notre thèse apparaît donc, en quelque sorte, comme le prolongement de l'étude d'un des aspects soulevés par la sienne : le point de vue ensembliste**.

Enfin J. Rolland montre que les erreurs ne viennent pas seulement d'une confusion d'ordre sémantique entre les expressions de l'implication mais sont aussi des erreurs logiques. Après l'étude d'une erreur dans une copie d'étudiant qu'il interprète comme le passage de :

il existe A $\Rightarrow$ il existe B à il n'existe pas A(x) $\Rightarrow$ il n'existe pas B(x), il annonce :

plus que le sens des expressions liées à l'implication, nous dirons que c'est bien le sens que peut prendre l'implication elle-même, au niveau logique, qui semble pouvoir être mis en cause.
[Rolland J., 1999, p.239]

Plus loin, il conclut :

Ces exemples nous permettent de penser que les problèmes rencontrés pas les étudiants ne se situent pas, contrairement à ce qu'affirme El Faqih, uniquement du côté du sens que peuvent prendre les différentes écritures de l'implication mais peuvent témoigner de difficultés d'ordre logique, dans le déroulement du raisonnement. […] De fait, il apparaît comme évident de conclure en disant que les difficultés d'ordre « sémantique » et logique sont liées dialectiquement. D'une part, si le sens des expressions langagières signifiant l'implication n'est pas installé, il semble difficile de conduire un raisonnement logique construit avec ces expressions. D'autre part, si des difficultés concernant le sens de l'implication, au niveau logique, sont présentes, il semble délicat de pouvoir mettre en correspondance un sens non maîtrisé et des expressions langagières.
[Rolland J., 1999, p.243-244]

Nous affirmons aussi que des erreurs logiques sur l'implication sont présentes encore à la fin de l'université et qu'elles peuvent même cohabiter avec certaines connaissances de logique. Nous montrons d'ailleurs, comme l'affirme J. Rolland (p.239) que la connaissance formelle de l'équivalence d'une implication avec sa contraposée peut cohabiter avec une utilisation contradictoire de l'implication.

Enfin J. Rolland a montré la pertinence des mathématiques discrètes pour la problématisation de l'implication.

Nous montrons en quoi, d'un point de vue théorique et en l'illustrant avec une proposition d'ingénierie, les mathématiques discrètes offrent un cadre favorable pour les choix de variables qui nous intéressent ce qui nous permet de confirmer nos thèses quant à la pertinence des mathématiques discrètes :
- pour l'évolution du rapport à la modélisation dans le sens d'une meilleure conformité à celui de l'institution savante.
- pour faire le lien entre modélisation et distinction CN/CS.
- et, puisque les notions sont liées, pour problématiser cette distinction CN/CS.
[Rolland J., 1999, p.303]

Nous utilisons, nous aussi les mathématiques discrètes, comme lieu privilégié pour problématiser l'implication, dans notre situation *Polymino*. Nous verrons, lorsque nous détaillerons notre problématique, comment les Polyminos répondent aux contraintes de nos variables globales.

1.4. M. Legrand : *maximum d'information en logique naturelle*

Nous avons rapporté, dans notre premier chapitre, quelques résultats du travail de M. Legrand et du groupe *apprentissage du raisonnement* de l'IREM de Grenoble [Legrand M., 1983]. Il justifie que travailler sur le raisonnement est essentiel pour les élèves :

> *Et cependant, il nous semble qu'au lieu de faire acquérir aux élèves un maximum de connaissances (qu'ils s'empresseront d'oublier ou de déformer et qu'ils utiliseront par la suite à mauvais escient), notre rôle essentiel d'enseignant consiste à leur apprendre à gérer les multiples informations dont ils sont abreuvés, pour qu'ils puissent inventer des solutions aux nouveaux problèmes auxquels ils seront confrontés.*
> *[Legrand M., 1983, p. 57]*

Et pour cela, *l'accoutumance et l'imitation* ne peuvent pas suffire [ibid. p.58]. C'est pourquoi ce groupe a construit l'activité cosmonautes, *pour tenter d'expliciter les règles élémentaires du raisonnement scientifique, et surtout, pour amener l'élève à refuser un comportement de réponse « stupide » basé sur le postulat [que] toute réponse posée dans le cadre scolaire a une unique réponse [que l'on obtient] en manipulant les données au moyen des règles […] du dernier chapitre traité en cours* [ibid. p.60].

M. Legrand insiste ensuite sur la nécessité, pour l'apprentissage, *de « faire un pas de côté » par rapport à sa propre activité* et de permettre ainsi un regard critique et *une analyse des méthodes qui ont conduit à la réussite ou à l'échec*[ibid. p.62]. C'est pourquoi les auteurs ont *inséré la phase de travail en petits groupes* [ibid. p.63]. C'est à la fois dans cet objectif de permettre une analyse des méthodes mises en œuvre et aussi dans l'objectif de confronter les différents points de vue sur l'implication que nous avons construit nos situations avec des phases de travail en petits groupes de 4 ou 5 personnes.

Nous avons déjà rapporté les résultats de M. Legrand concernant la logique naturelle dans notre premier chapitre, en particulier, l'implication interprétée comme une équivalence et le *principe du maximum d'informations*. Ce dernier*, très utilisé inconsciemment dans le langage courant met en conflit la « logique courante » et la « logique scientifique »* [ibid. p.65]. Ces résultats nous ont largement inspirée pour notre analyse épistémologique.

Dans ses articles sur le *débat scientifique* [Legrand M., 1990 & 2000 & 2001], M. Legrand adopte un point de vue plus général qui se situe au-delà des mathématiques. Pour lui, le débat est un outil à l'usage du professeur dans sa classe pour problématiser un concept.

> *Le principe du débat est de faire passer l'élève ou l'étudiant […] de la position d'auteur d'assertions impersonnelles et réputées vraies (définitions, théorèmes et démonstrations du professeur) à la position d'auteur d'énoncés problématiques (conjectures et propositions de preuves).*
> *[Legrand M., 2000, p.1]*

Dans le cadre de notre recherche, nous tenons aussi cette position que, pour qu'il y ait apprentissage sur le raisonnement en général, il faut que les élèves soient en situation de faire des *conjectures* et de *construire* des preuves. Nous n'avons pas utilisé le débat scientifique qui ne nous paraissait pas adéquat dans sa forme pour notre expérimentation, cependant, pour réaliser cela nous avons choisi des situations à réel *enjeu de découverte et de vérité* comme nous le montrerons dans notre analyse a priori.

L'activité *circuit* [Legrand M. 2000 & 2001] concerne le raisonnement mathématique et ses différences avec d'autres raisonnements scientifiques ou non, le débat étant le moyen de faire apparaître ces différences. L'objectif est de montrer que *les consensus larges ne sont pas du ressort de la seule évidence* et qu'il est nécessaire *d'adopter des conventions et de construire des modèles pour pouvoir se* *mettre « universellement » d'accord* [Legrand M., 2000, p.5]. Les institutionnalisation qui ponctuent les débats montrent la différence entre logique naturelle et logique mathématique.

> *Les institutionnalisations […] montrent alors que les conventions des mathématiciens sont dans certains cas en accord et dans d'autres totalement opposées à celles qu'on adopte tacitement dans la vie courante.*
> *[Legrand M., 2000, p.5]*

C'était un des objectifs de notre mémoire [Deloustal V., 1999] que de proposer des situations qui fassent apparaître des conceptions de l'implication dans la logique naturelle. Le débat, lors de la deuxième séance, portait sur des questions préparées de telle sorte à provoquer des confrontations entre des conceptions de l'implication proches de la logique naturelle et la définition mathématique de l'implication. C'est ce que nous détaillerons dans le paragraphe 2.

1.5. R. Duval : *raisonnement déductif*

Nous avons montré dans notre étude de manuel, l'intérêt des **phénomènes de congruences** explicités par R. Duval [Duval R., 1988 & 1995] pour analyser les difficultés attachées aux différentes expressions langagière traduisant l'implication.

Nous allons maintenant rapporter une partie de son travail présenté dans l'article *Argumenter, démontrer, expliquer, continuité ou rupture cognitive ?* [Duval R., 1993], en particulier ce qui concerne le raisonnement déductif. L'article partant de l'existence d'un *mode de raisonnement naturel* [ibid. p. 37], l'argumentation, s'intéresse au passage de l'argumentation à la démonstration mathématique. Il montre, sur un exemple, que ce passage *constitue un saut considérable, puisqu'il faut d'une certaine manière tout réorganiser ou tout « repenser »* et qu'il peut même *se révéler « logiquement » impossible* [ibid. p. 51]. Il montre aussi la difficulté à différencier un discours argumentatif d'une démonstration, en particulier parce que les marqueurs langagiers sont parfois les mêmes utilisés avec des intentions différentes.

> *Certains mots ou certaines expressions peuvent être employés comme des connecteurs combinatoires ou comme des connecteurs argumentatifs : le « si…alors », le « ou »…*
> *[Duval R., 1993, p. 57]*

Il conclut par le rejet d'une continuité cognitive entre argumentation et démonstration, l'argumentation ne suffisant pas à ouvrir *la voie vers la démonstration, un apprentissage spécifique et indépendant [étant] nécessaire en ce qui concerne le raisonnement déductif* [ibid. p. 60].

Nous ne nous sommes pas intéressée à l'aspect argumentation en tant que tel, mais **nous avons utilisé le *schéma d'organisation du pas de déduction* qu'il propose** [ibid., p. 44] et que nous avons cité à plusieurs reprises dans notre étude épistémologique. Le travail de R. Duval nous a été utile pour notre étude sur le point de vue du raisonnement déductif

1.6. N. Balacheff : *différents types de preuves*

Nous devons d'abord dire que N. Balacheff appartenait au groupe de recherche de l'IREM de Grenoble qui a construit l'activité *cosmonaute* [Legrand M., 1983], les résultats énoncés précédemment concernent donc également son travail. N. Balacheff a beaucoup travaillé par la suite sur les notions de preuve, démonstration, argumentation et réfutation, nous rapportons ici une partie de son travail de thèse qui n'est évidemment qu'un élément de sa recherche.

La thèse de N. Balacheff, [Balacheff N., 1988] porte sur les problèmes d'apprentissage et d'enseignement de la démonstration en mathématiques au collège. Il a travaillé, en particulier, sur la formalisation et a distingué différents niveaux de preuve à partir de l'étude expérimentale de comportements d'élèves. Les cinq niveaux mis en évidence sont classés en deux catégories *preuves pragmatiques* et *preuves intellectuelles* qui regroupent respectivement les niveaux *empirisme naïf*, *expérience cruciale*, *exemple générique* pour la première et *expérience mentale*, *calcul sur des énoncés* pour la seconde.

Il s'intéresse à la différence entre l'argumentation et la démonstration mathématique et montre que l'une est un obstacle à l'autre.

> *En particulier, [nous mettons] en évidence l'obstacle que constituent les démarches d'argumentation dans la prise de conscience de la nature des démonstrations en mathématiques.*
> *[Balacheff N., 1988]*

L'article de Duval présenté au paragraphe précédent appuie donc cette étude qui lui est antérieure.

L'apport du travail de N. Balacheff dépasse largement l'objet implication, cependant, il est intéressant pour notre recherche car nous avons adopté l'hypothèse que **l'implication ne peut être problématisée que dans des situations-problèmes liées à des situations de validation**. Toutefois, nous n'avons pas trouvé pertinent pour notre recherche de reprendre ces différents types de preuves. En effet, différencier les niveaux de preuve au niveau formel plutôt qu'au niveau des types de raisonnement sous-jacents, paraît être une utilisation très réductrice du travail de N. Balacheff. Cependant, il nous paraît difficile d'agir autrement.

2. Synthèse de nos propres travaux antérieurs

Ce paragraphe présente les résultats d'une expérimentation menée pendant notre DEA [Deloustal V., 1999 & 2000]. Nous avons voulu essayer de cerner les conceptions[47] sur l'implication qu'ont des étudiants, futurs enseignants. Nous avons choisi quatre étudiants, deux garçons et deux filles, d'un niveau en mathématiques supérieur à la maîtrise[48] se préparant au professorat des collèges et lycées.

Pour cela, nous cherchons à repérer des règles et des *propriétés-en-acte* présentes ou au contraire absentes. Nous voulons observer, comment ils s'en servent, dans quelles circonstances, si elles *cohabitent*, s'il y a des *invariants*. Nous voulons voir quelles sont les propriétés-en-acte qui sont exprimées et quelles sont celles présentes de façon implicite.

Pour permettre ceci, nous avons construit un questionnaire qui concerne aussi bien l'objet mathématique que son utilisation en tant qu'outil. Nous avons essayé de provoquer des situations qui mettent en conflit plusieurs propriétés-en-acte. Pour approfondir ce qui nous sera apparu intéressant dans le questionnaire, et aussi pour confronter différentes propriétés-en-acte, nous avons prévu un débat réunissant les quatre étudiants. Il reprendra certaines questions du questionnaire, sous la même forme ou sous une forme un peu arrangée. Nous choisirons les questions en fonction des réponses au questionnaire.

Notre étude épistémologique et notre étude des manuels nous permettent de prévoir l'apparition de quelques propriétés-en-acte que nous avons classées et numérotées pour faciliter l'analyse :

(P1) : *A implique B* n'a d'utilité (et/ou de sens) que lorsque A est vraie.

(P2) : *A implique B* n'a de sens que si A et B ont un lien de cause à effet.

Type 3 : l'aspect vrai des variables A et B est prépondérant
(P3a) : *A implique B* est vraie si B est vraie.
(P3b) : *A implique B* est vraie si A et B sont vraies (par ailleurs).

Type 4 : l'aspect faux des variables A et B est prédominant
(P4a) : Si A est fausse, *A implique B* est vraie.
(P4b) : Si A est fausse, *A implique B* est fausse

[47] le terme *conception* est a prendre au sens de Brousseau que nous avons donné dans notre analyse épistémologique.
[48] L'un des garçons prépare une thèse en mathématiques pure, l'autre a un DEA de mathématiques pures et l'agrégation de mathématiques, il est en PLC2, l'une des filles a réussi son CAPES de mathématiques et prépare un DEA de didactique des mathématiques, la dernière fille a une maîtrise de mathématique et prépare le CAPES.

(P4c) : Si B est fausse, *A implique B* est fausse.
(P4d) : Si A et B sont fausses, *A implique B* est fausse.

(P5) : Si A est vraie et si B est fausse, alors *A implique B* est fausse.

2.1. Le dispositif expérimental

Notre expérimentation se compose d'un questionnaire individuel[49] auquel les quatre étudiants ont répondu séparément pendant 2h, suivi, la semaine suivante, d'un débat les réunissant tous pendant deux heures. Le choix des questions du débat s'est fait en fonction des réponses aux questionnaires. Nous avons voulu confronter des réponses contradictoires pour évaluer la stabilité des différentes propriétés-en-acte.

Nous résumons ici nos travaux et n'en rapportons qu'une partie, le lecteur pourra se reporter à [Deloustal, 1999 & 2000] pour plus de détails. En particulier, nous réduisons l'analyse préalable à quelques questions et ne donnons que les résultats qui nous paraissent les plus intéressants. Le lecteur trouvera en annexe la liste complète des items de ce questionnaire.

2.2. Analyse préalable du questionnaire

2.2.1. Premières représentations sur le concept d'implication (1-1a / b ; 2-2a / b ; 2-3)

Dans cette première partie, nous voulons étudier les représentations spontanées des étudiants sur l'objet mathématique *implication*, à travers le vocabulaire et les ostensifs utilisés. Nous voulons, en particulier, repérer si les trois points de vue sur l'implication (ensembliste, logique, raisonnement déductif) sont également présents. Notre analyse de manuels nous permet de faire quelques hypothèses sur les résultats :

- Les ostensifs ensemblistes et logiques seront, sinon complètement absents, du moins peu présents à l'exception de $P \Rightarrow Q$.
- L'expression *seulement si* n'est pas disponible et n'est pas toujours correctement interprétée.

[49] Le lecteur trouvera ce questionnaire en annexe.

- Les schémas ensemblistes n'ont que peu de chances d'apparaître et, s'ils apparaissent, ce sera sous la forme de l'inclusion P ⊂ Q. En effet, ce schéma représentant le cas où l'implication est vraie partout, c'est-à-dire la phrase *Pour tout x, P(x) implique (x)* est le seul qui *vive* parfois dans les manuels.

Ostensifs de la négation de l'implication (q.2-3)
Donnez la négation de P ⇒ Q.
Vous pourrez la donner sous forme d'expressions langagière, symboliques, graphiques...

La négation de l'implication n'est pas une implication, c'est pourquoi nous faisons les hypothèses suivantes :

- La formulation de la négation de l'implication *P implique Q* est un exercice difficile, même pour des étudiants expérimentés.
- L'écriture de la négation de *P implique Q* est facilitée lorsque l'on utilise des ostensifs de l'implication *ensemblistes* ou *logiques* (table de vérité ou ¬P∨Q). Nous affirmons même que cela est nécessaire.
- Néanmoins, la réduction de l'implication dans le cadre ensembliste à l'inclusion peut rendre la négation de P ⇒ Q difficile à interpréter. Nier l'implication universellement quantifiée représentée par l'inclusion, c'est dire qu'il existe un contre-exemple et non pas dire que l'implication est fausse pour tous les objets. Lorsque la quantification est implicite cette distinction est difficile à faire.
- Enfin la connaissance de la notion de contre-exemple peut être un outil qui peut amener, par exemple, à la formulation logico-langagière *On a P et Non Q*.

2.2.2. Conditions nécessaires et conditions suffisantes (2-1 ; 6-1/2 ; 8 ; 2-4)

Dans cette deuxième partie du questionnaire, nous voulons repérer si les liens entre condition nécessaire, condition suffisante et implication sont clairs pour les étudiants.

Nous faisons l'hypothèse qu'il est plus aisé de reconnaître dans *P implique Q* que P est une condition suffisante pour Q que de reconnaître que Q est une condition nécessaire pour P.

Deux raisons principales nous ont conduite à cette hypothèse. La première est l'ordre d'apparition de P et de Q dans ces deux expressions et les difficultés liés aux phénomènes de congruences que nous avons déjà décrits [Durand-Guerrier V., 1996] et [Duval R., 1995].

La deuxième raison est la présence de la conception causale-temporelle qui amène à interpréter P ⇒ Q par P est la cause de Q et par suite P est avant Q. Il est alors difficile d'accepter que Q soit une condition nécessaire pour P. Cette conception causale-temporelle apparaît donc comme un obstacle à la reconnaissance de la condition nécessaire. Ceci est renforcé par l'usage de la langue française dans laquelle le mot « condition » a une forte connotation de cause. On interprète alors Q est une condition nécessaire pour P par « Q est ce sans quoi on ne peut avoir P » ou encore il faut avoir Q pour pouvoir avoir P.

Question 2-4 :
Y a-t-il des implications entre les deux expressions :
M est une condition nécessaire pour T
T est une condition suffisante pour M ?

Ces deux phrases sont toutes les deux équivalentes à l'implication T $\Rightarrow$ M, et par transitivité sont équivalentes entre elles. Nous attendons deux types de réponses :

- Ces deux phrases sont équivalentes. (Réponse juste)
- Il n'y a pas d'implication entre ces deux phrases. (Réponse fausse montrant que les connaissances sur condition nécessaire et condition suffisante ne sont pas suffisantes)

2.2.3. Prémisse fausse et conception causale (1-2 ; 1-3 ; 7)

Cette troisième partie est construite, d'une part, pour mettre au jour la conception causale sur l'implication, d'autre part, pour relever les propriétés-en-actes utilisées dans le traitement des implications à prémisse fausse et enfin pour confronter ces deux types de justification.

2.2.3.a) Quantification universelle implicite / Prémisse fausse (q.1-2)

Cet item a été construit pour permettre de problématiser les propriétés-en-acte liées à la vérifonctionnalité (deuxième tableau) mais aussi pour permettre un débat sur la question de la lecture implicite de l'implication sous forme *universellement quantifiée* (premier tableau) [Durand-Guerrier V., 1996 & 1999]. En effet, il y a deux réponses possibles à ce premier tableau suivant le statut que l'on donne à k (NP : *je ne peux pas savoir* / NS : *je ne sais pas répondre*) :

première réponse

Soit k $\in \mathbb{N}$ quelconque	Vrai	Faux	NP	NS
a) k pair $\Rightarrow$ k+1 pair		*		
b) k pair $\Rightarrow$ k+1 impair	*			
c) k impair $\Rightarrow$ k+1 pair	*			
d) k impair $\Rightarrow$ k+1 impair		*		

deuxième réponse

Vrai	Faux	NP	NS
		*	
*			
*			
		*	

La première réponse se fait sur des implications *universellement quantifiées implicitement*. On donne alors en a) la valeur de vérité de la phrase : $\forall\, k \in N,\ \ k$ *pair* $\Rightarrow$ *k+1 pair*. Cette phrase est évidemment *fausse* puisqu'il existe un contre-exemple : k=4. Cette réponse reflète une pratique mathématique courante et souvent inconsciente.

La deuxième réponse se fait sur des implications *entre énoncés contingents*. k est un *élément générique* que l'on ne connaît pas. On donne alors en a) la valeur de vérité de la *phrase ouverte*: *Soit k fixé (que je ne connais pas) k pair* $\Rightarrow$ *k+1 pair*. Or ici, cette implication peut être soit vraie soit fausse : si k=2 cette implication est fausse, mais si k=3 cette implication est vraie puisque sa prémisse est fausse. Les phrases b) et c) sont vraies quelle que soit la parité de k.

Ces deux réponses peuvent être *également considérées comme justes,* suivant que l'on considère que ce sont des phrases implicitement universellement quantifiées ou que ce sont des instances avec des éléments génériques. Cependant, le point de vue adopté dans la première réponse n'est pas adapté au deuxième tableau.

Dans le deuxième tableau, il y a un élément k fixé et c'est donc un cas particulier de la deuxième réponse au premier tableau. Pour la deuxième partie de cette question, nous attendons trois types de réponses :

	première réponse				deuxième réponse				troisième réponse			
	Vrai	Faux	NP	NS	Vrai	Faux	NP	NS	Vrai	Faux	NP	NS
3 pair $\Rightarrow$ 4 pair		*			*					*		
3 pair $\Rightarrow$ 4 imp.	*				*					*		
3 imp. $\Rightarrow$ 4 pair	*				*				*			
3 imp. $\Rightarrow$ 4 imp.		*				*				*		

La première réponse se réfère au *premier tableau* avec quantification universelle. Justification : on reprend le tableau précédent, ici k=3. Cette réponse est fausse car une implication universellement quantifiée peut être fausse sans que l'implication en énoncés contingents correspondante soit fausse pour tous les objets (dissymétrie du vrai et du faux !)

La deuxième réponse est basée sur l'utilisation de *Si A est fausse, alors A* $\Rightarrow$ *B est vraie* (P4a) (réponse juste).

La troisième réponse est basée sur l'utilisation de *Si A est fausse, alors A* $\Rightarrow$ *B est fausse* (P3b) (réponse fausse).

Toutes ces réponses peuvent avoir des variantes, en particulier dans les justifications. D'autres propriétés-en-acte, parmi celles que nous avons recensées, peuvent être utilisées. D'autre part, l'utilisation de la propriété « deux nombres consécutifs n'ont pas la même parité » ou encore l'utilisation de l'équivalence avec la contraposée (par exemple pour b') sont attendues.

2.2.3.b) Logique naturelle (q. 1-3)

Voici trois phrases :
P1 : Le soleil est une étoile
P2 : Il fait jour
P3 : Il fait nuit
Y a-t-il des implications entre ces phrases que vous considérez vraies ?
Y a-t-il des implications entre ces phrases que vous considérez fausses ?
Justifiez vos réponses.

Pour problématiser la conception causale, nous avons choisi des propositions telles qu'il existe un cheminement explicatif possible mais non évident entre les deux propositions P2 et P1. De plus, les propositions P2 et P3 sont construites de telle façon qu'elles impliquent mathématiquement la proposition P1 par le même argument mais qu'il ne paraît pas exister de lien explicatif entre P3 et P1. Voici un exemple d'un cheminement explicatif susceptible d'être rencontré pour montrer P2 $\Rightarrow$ P1 :

Il fait jour donc une étoile éclaire la Terre (puisque la seule possibilité pour qu'il fasse jour sur une planète est qu'elle soit éclairée par une étoile). Or, seul le soleil est susceptible d'éclairer la Terre (C'est le seul astre suffisamment près). Donc le soleil est une étoile.

Nous parlons de *cheminement explicatif* menant de P2 à P1, car nous ne pouvons dire que P2 est la *cause* de P1. En effet, il y a déjà, dans cette réponse, un raisonnement mathématique qui ne traduit pas seulement une relation de cause à effet. Sinon, la réponse serait P1 $\Rightarrow$ P2 car le soleil est la cause du jour. Cependant, nous pensons que cette réponse dépend bien de la conception causale car elle montre la recherche d'un *cheminement explicatif.*

Nous faisons, d'autre part, l'hypothèse que P2 $\Rightarrow$ P3 et P3 $\Rightarrow$ P2 vont souvent être données pour fausses. En effet, elles ne sont vraies que lorsque leur prémisse est fausse : un cas peu envisagé dans la pratique mathématique.

2.2.3.c) prémisse fausse / lien explicatif(q.7)

Dans un manuel (Algèbre générale par A. Calvo et B. Calvo, Masson), on a trouvé la phrase :
[la proposition] « 5 est un nombre pair » $\Rightarrow$ « 3 est un nombre pair » est vraie.
Qu'en pensez-vous ?

Nous citons le manuel afin de déstabiliser les réponses spontanées du type : *c'est faux* ou *ça n'a pas de sens*. En effet, nous faisons l'hypothèse qu'un étudiant ne met pas naturellement en doute les écrits d'un manuel.

Nous attendons quatre types de réponses basées sur la :

- Vérifonctionnalité (P4a / P4b / P4c)

VRAI, utilisation de Si P est faux alors « P ⇒ Q » est vraie. (réponse juste)

FAUX, la prémisse et/ou la conclusion sont fausses.

- Conception causale (P2)

VRAI, utilisation de « deux nombres k et k-2 ont même parité ».

- Contraposée

VRAI, utilisation de la contraposée. (réponse juste)

- Prémisse fausse dénuée de sens (P1) :

On ne peut pas répondre, ça n'a pas de sens car *5 est un nombre pair* est faux.

La conception causale peut très bien cohabiter avec la propriété-en-acte « implication fausse lorsque la prémisse est fausse ». En effet, on peut attendre une réponse du type :

> *C'est faux car « 5 est pair est faux ». Mais si on suppose que 5 pair est vrai alors l'implication est vraie car k et k-2 ont même parité.*

Cette cohabitation paraît favorisée par la réponse donnée par le manuel.

2.3. Quelques résultats :

2.3.1. Premières représentations (q. 1-1a, 1-1b, 2-2a, 2-2b, 2-3.)

2.3.1.a) Ostensifs de l'implication

Nos hypothèses sont confirmées :

- Il n'y a pas d'expressions liées au cadre ensembliste. Les schémas ensemblistes sont quasiment absents. Les quatre retranscriptions orales montrent qu'ils ne comprennent pas ce qu'on veut dire par *expressions graphiques* :

- X : Là par exemple, « expression graphique » je ne vois pas bien...

Si : Ahlàlà « graphique », je ne sais pas ce que c'est ! (...) je ne vois vraiment pas d'exemples

- Les seules expressions du cadre logique sont P ⇒ Q (3 fois) et Non Q ⇒ Non P (1 fois).
- L'expression *P seulement si Q* est complètement absente.

• Les termes *nécessaire* (2 fois) et *suffisant* (1 fois) sont peu présents.

• L'expression *P donc Q* apparaît 3 fois. Pour un étudiant, les aspects causal et temporel sont particulièrement marqués, par les expressions (donc, lorsque, puisque...on en déduit que) et par le temps des verbes choisis.

• Dans les exemples donnés, P et Q ne sont jamais « étrangers » l'un à l'autre, il y a toujours un lien explicatif entre les deux.

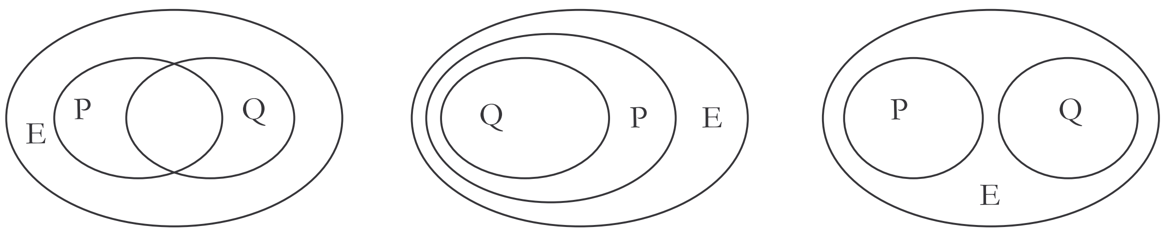
• Lors de la traduction de la phrase W seulement si S, une réponse fausse attestant de la confusion avec la réciproque et montrant la temporalité sous-jacente :

> *S entraîne W et seulement S*
> *Aucune possibilité d'avoir W sans passer par S*

2.3.1.b) Ostensifs de la négation de l'implication

• Une seule réponse juste *on a P et Non Q à la fois* (donnée par l'étudiante après de longues réflexions) suivie de schémas ensemblistes basés sur l'interprétation :

Si P, Q, sous-ensembles de E, $Non\ (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow Non(P \subset Q)$[50]



Ces schémas sont construits comme ne vérifiant pas l'inclusion de P dans Q. Or l'inclusion représente une implication universellement quantifiée comme nous l'avons dit. Il s'ensuit que ces schémas représentent les cas où l'implication universellement quantifiée est fausse. C'est-à-dire les cas où l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est fausse pour au moins un objet x de E, et non pas le cas où cette implication est fausse pour tous les objets x de E.

• Confusion de la contraposée avec la négation[51] (2 fois).

• Une implication non équivalente : *Non Q* $\Rightarrow$ *P* (1 fois).

• Une expression langagière : *Q peut se réaliser sans que P se réalise* (1 fois). La conception causale peut expliquer cette réponse puisque l'on interprète alors l'implication par « P est la cause de Q ».

[50] Cette phrase est donnée par l'étudiante.
[51] un autre étudiant nous a demandé la différence entre contraposée et négation (réponse suivante).

2.3.2. Conditions nécessaires et conditions suffisantes (questions 2-1, 2-4, 6-1, 6-2, 8)

- Les conditions nécessaires et suffisantes sont reconnues et bien utilisées pour 3 étudiants.

- La condition nécessaire n'est pas reconnue alors que la condition suffisante est bien utilisée (1 étudiante). La conception causale-temporelle de l'implication paraît être un obstacle à la reconnaissance de la condition nécessaire. Par exemple, à la question 6-1, la phrase *R est une condition nécessaire pour B* est traduite par :

il faut avoir R pour avoir B puis par $R \Rightarrow B$

Le passage de sa première expression mathématiquement correcte à la deuxième mathématiquement fausse peut s'expliquer par la conception causale-temporelle, puisque R est nécessaire à B, R doit être vérifiée avant B, et donc R implique B. La réponse à la question 2-4 est alors :

il n'y a pas d'implications entre les deux expressions car T nécessite M et il suffit d'avoir T pour avoir M.

Notre hypothèse est renforcée par l'échange oral à la fin du questionnaire où l'on voit la temporalité sous-jacente à la condition nécessaire :

V : Et pourquoi il n'y a pas d'implications entre les deux phrases ?
S : Pour moi, « M condition nécessaire pour T » ça veut dire que nécessairement il faut avoir M pour avoir T. Donc M implique T.
V : Nécessairement il faut avoir M pour avoir T, donc M implique T... c'est ça ?
S : Attends, je m'embrouille toute seule! Oui, c'est ça.
V : Et alors, pourquoi il n'y a pas d'implication entre les deux ?
S : Pour la première, « M condition nécessaire pour T » donc nécessairement il faut avoir M pour avoir T. Donc M implique T.
Pour la deuxième, il suffit d'avoir T pour avoir M, donc T implique M.
V : Donc, pour la première M implique T et pour la deuxième T implique M.
S : Voilà.

2.3.3. Propriétés en acte liées à la prémisse fausse / Propriété en acte liée à la causalité (questions 7, 1-2, 1-3.)

2.3.3.a) quantification universelle implicite

- quantification universelle implicite au premier tableau (4 étudiants)

toutes les réponses au premier tableau sont conformes au premier type et se font avec une quantification universelle implicite. Cette quantification apparaît dans les justifications (ici la justification de d') :

C : d'après d), $\forall k \in N$ *(k impair* $\Rightarrow$ *k+1 impair) est faux.*

Deux types de réponses au deuxième tableau :

- utilisation de la propriété logique *si P fausse alors* $P \Rightarrow Q$ *est vraie* (2 étudiants).

- utilisation de la propriété-en-acte *si P fausse alors* $P \Rightarrow Q$ *est fausse* (P4b) (2 étudiants).

• La propriété en acte (P4b) prend le dessus sur le lien explicatif puisque b' est dite fausse alors que la propriété *deux nombres consécutifs n'ont pas la même parité* est bien vérifiée. Cette dernière propriété paraît nécessaire mais non suffisante.

• La vérifonctionnalité de l'implication n'est pas connue. Elle est complètement ignorée ou alors sa connaissance est réduite à la connaissance de la propriété « Si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est vraie » (P3a) et la vérité de la conclusion n'est jamais utilisée pour justifier de la vérité de l'implication.

Ce manque de connaissances de la vérifonctionnalité de l'implication oblige à la cohabitation de la propriété-en-acte « Si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est vraie » (P3a) avec une propriété-en-acte de causalité. En effet, dès que la prémisse est vraie et que (P3a) n'est pas utilisable, il faut recourir à l'utilisation d'un lien explicatif entre la prémisse et la conclusion pour montrer que l'implication est vraie.

• la contraposée n'est jamais utilisée dans cette question.

• Il y a difficulté à décider si l'on doit prendre ou non en compte les contenus sémantiques. Différentes solutions sont proposées suivant les valeurs de vérités accordées aux propositions (4 étudiants).

C : Pour les questions a', b', c', d', tout dépend de ce qui est supposé être vrai. Si on suppose que les entiers 2k sont pairs (et sont les seuls) et les entiers s'écrivant 2k+1 sont impairs (et sont les seuls) [alors on a]
Si :Pour les quatre dernières, au principe précédent, j'ai ajouté la connaissance de la parité de 3. On aurait très bien pu ne pas le faire, les réponses auraient été F, V, V, F.
V : Finalement, pourquoi t'avais mis « on ne peut pas savoir » ?
X : Parce que j'étais déstabilisé, si tu veux.
V : Pourquoi ?
X : Parce que je ne maîtrise pas ce genre de trucs. En fait, je ne sais pas dans quel monde me placer! On a des infos mais on ne sait pas si on a le droit de les utiliser!
V : Quoi comme genre d'infos ?
X : Par exemple : 4 est pair ou 3 est impair.

La confrontation entre l'utilisation des propriétés-en-acte liées à la vérifonctionnalité et la conception causale paraît être à l'origine de ces questions. La vérité de l'implication dépend-elle de la vérité de la prémisse et de la conclusion ou bien ne dépend-elle que de la qualité du lien explicatif ? Les étudiants accordent suffisamment d'importance au lien explicatif pour être prêts à « oublier » ce qu'ils savent sur la parité des nombres et ne s'intéresser qu'à la relation sémantique entre prémisse et conclusion.

Des discussions auront lieu, de façon récurrente, au cours du débat sur le rôle des contenus mathématiques pour déterminer la valeur de vérité d'une implication. C'est donc une question importante liée à l'implication. De plus, on voit à la suite de ces questions apparaître une distinction « instinctive » entre la logique qui s'intéresserait plus aux valeurs de vérité des propositions dans l'implication et les mathématiques qui s'intéresseraient essentiellement au lien explicatif entre prémisse et conclusion.

2.3.3.b) implication mathématique et logique naturelle

- Aucune utilisation de propriétés liées à la vérifonctionnalité de l'implication.

Deux types de réponses :

- Il n'y a pas d'implications (2 fois)
- Justification par un lien explicatif : P2 $\Rightarrow$ P1 est vraie et P2 $\Rightarrow$ P3 est fausse. (2 fois)

> *X : en considérant que pour avoir la lumière du jour, il faut une étoile assez proche et manifestement, c'est le soleil qui nous envoie cette lumière.*
> *Si : une étoile est un astre lumineux. Il fait jour, nous sommes donc éclairés par un astre lumineux. Le soleil sera celui-ci*
> *X : P2 $\Rightarrow$ P3 et P3 $\Rightarrow$ P2 fausses car P3 est la négation de P2.*
> *Si : nuit est le contraire de jour (…) (NonP3) $\Rightarrow$ P2.*

- La réponse « P3 $\Rightarrow$ P2 est vraie » n'est pas apparue. Bien que ce soit une réponse correcte[52] associée à (P3a) et basée sur le fait que « il fait jour » est vraie, elle paraît en désaccord avec la logique naturelle.

- Le traitement de ces implications les amène à se poser les questions du statut de vérité des propositions et de la présence ou de l'absence de lien explicatif entre les phrases.

> *C : C'est trop bizarre ! (…) C'est horrible ! Qu'est-ce qu'on suppose faux ou vrai ?*
> *Si : Ce que j'aimerais savoir, c'est si on considère que les phrases sont toutes vraies ou fausses… Est-ce qu'on peut considérer qu'elles sont toutes vraies et après regarder les implications ?*
> *V : Pourquoi tu dis « il n'y a aucune implication » ?… Avec P1 ?*
> *S : Ben… il n'y en a pas. On ne peut pas dire P1 implique P2, c'est pas logique…*
> *V : Pourquoi ?*
> *S : Parce que ce n'est pas une conséquence ! ! !*

Ce contexte inhabituel avec, en particulier, la difficulté à discerner les phrases vraies des phrases fausses, semble être à l'origine de l'absence, dans les justifications, des propriétés-en-acte liées à la vérifonctionnalité utilisées précédemment.

Les implications les plus acceptables aux yeux des étudiants sont celles relatives à P2 et P3. Les liens entre ces deux phrases et leurs valeurs de vérité sont plus faciles à voir :

52 A $\Rightarrow$ Non A est vraie dans le cas où A est une proposition fausse.

2.3.3.c) prémisse fausse

Les réponses à la question 7 sont assez proches des réponses à la question 1-2.

- pas d'utilisation de l'outil « contraposée » pour cette question.
- utilisation de la propriété en acte « Si P est fausse alors P ⇒ Q est vraie » (P3a) (1 fois).

  X : Je suis d'accord avec l'auteur car le fait que « 5 est un nombre pair » est faux. Il implique donc toute proposition.

- utilisation d'un lien explicatif (P2) (1 fois)

  S : Si k est un nombre pair, alors k=2p.
  k-2=2p-2=2(p-1) est un nombre pair.
  Donc si on considère que 5 est pair alors 5-2 est pair.

- production de deux réponses : l'une basée sur la prémisse fausse (P3) et l'autre basée sur un lien explicatif (P2) (2 fois).

  C : 1) La proposition 5 est un nombre pair *est fausse [...] Donc [l'implication] est vraie.*
  2) si on suppose vraies les propositions suivantes
  P1 : « ∀ k ∈ N, k pair ⇒ (k+2n) pair et tel que (k+2n)∈N ».
  P2 : « 5 est un nombre pair ».
  on a : P2 ⇒ (« 3 est pair »)
  Si : La proposition est vraie avec les « axiomes »
  • 5 est le suivant du suivant de 3
  • Le suivant du suivant d'un nombre a la même parité que celui-ci.
  Si l'on sait en plus la parité de 3 dans l'arithmétique classique, la proposition devient fausse.

Dans ces réponses la conception causale cohabite avec les propriétés-en-acte liées à la vérifonctionnalité et ne paraissent pas se contredire : « tout dépend de ce qu'on suppose ».

2.3.4. Autres résultats :

- Le lien entre l'implication et les ensembles est peu présent et paraît superficiel.

En effet, le lien formel entre $A \subset B$ et l'implication A ⇒ B (où A (resp. B) est l'ensemble des objets qui vérifient la propriété A (resp.B)) est connu. Pourtant, les ensembles ne sont jamais des outils pour répondre aux questions.

- Une seule réponse fait ressortir (en partie) la quantification universelle sous-jacente à une inclusion d'ensembles.
- Ces résultats sont conformes à ce que nous avions vu dans les manuels.

- L'utilisation de l'implication dans les démonstrations ne va pas forcément de soi, comme par exemple, pour traduire une implication à prémisse double[53] ou pour traduire l'expression « seulement si ». *Les contenus mathématiques ne semblent pas être toujours suffisants pour permettre d'écrire les implications « dans le bon sens ».*

2.4. Le débat

2.4.1. quantification implicite / prémisse fausse

Nous voulons mettre en conflit les propriétés-en-acte « si P est faux alors P ⇒ Q est vraie », « si P est faux alors P ⇒ Q est fausse » et la conception causale-temporelle. Pour cela, nous avons introduit une réponse attendue qui n'est pas apparue et dont nous faisons l'hypothèse que la justification va amener des débats.

Voici une réponse qui nous a été donnée :

Soit k ∈ quelconque,	Vrai	Faux	On ne peut pas savoir	Je ne sais pas répondre
a) k pair ⇒ k+1 pair		*		
b) k pair ⇒ k+1 impair	*			
c) k impair ⇒ k+1 pair	*			
d) k impair ⇒ k+1 impair		*		

a') 3 pair ⇒ 4 pair		*		
b') 3 pair ⇒ 4 impair	*			
c') 3 impair ⇒ 4 pair	*			
d') 3 impair ⇒ 4 impair		*		

La justification de a'), b'), c') et d') est la suivante :
Je reprends le premier tableau en prenant k=3.

Nous présentons quelques résultats qui nous paraissent importants, les discussions portant sur les différents thèmes sont imbriquées et se nourrissent les unes des autres. Le débat sur cette question est très long, il a été arrêté par les observateurs au bout d'une heure sans qu'il y ait de réel consensus entre les étudiants, il comporte de nombreux « retours en arrière ».

[53] Nous appelons implication à prémisse double une implication du type : (A et B) ⇒ C

• Les étudiants sont tous déstabilisés, en particulier parce que la réponse proposée leur paraît cohérente alors que ce n'est pas celle qu'ils ont donnée.

• La contraposée n'est pas un outil pour décider de la vérité de l'implication b').

• La confrontation des propriétés-en-acte sur le cas de la prémisse fausse a lieu dès le début, et la propriété-en-acte « l'implication est vraie lorsque la prémisse est fausse » (2 étudiants) est opposée à la propriété-en-acte « l'implication est fausse lorsque la prémisse est fausse » et la conception causale (2 étudiants), pour laquelle il y a prédominance du lien explicatif sur les propriétés-en-acte liées aux valeurs de vérité de la prémisse et de la conclusion.

28. Si :	*moi j'ai répondu ça parce que, bon pour le premier tableau, je suis parti du principe que quand un nombre avait une certaine parité celui d'après avait une autre parité... (...) Je me suis pas mis sur un plan logique...mais beaucoup plus mathématique. Et dans le deuxième tableau, pour répondre, j'ai utilisé cet argument plus la connaissance de la parité de 3...*

La propriété logique (P4a) est, en particulier, en désaccord avec la logique naturelle pour l'implication « 3pair $\Rightarrow$ 4 pair ». La première la donne vraie alors que la deuxième la donne fausse, et ce pour deux raisons distinctes, la prémisse fausse d'une part, le lien explicatif faux d'autre part.

441. S :	*Non mais en fait, je sais que pour moi il y avait deux trucs, soit on considérait, on savait que 3 était impair et à ce moment-là c'est un truc qui est faux. Soit on considère qu'un nombre et son successif ne peuvent pas être de la même parité tous les deux et à ce moment-là ça aussi c'est faux. (…) Ca a deux raisons d'être faux.*

• La vérifonctionnalité de l'implication n'est pas reconnue. Par exemple, prendre en compte la conclusion est nécessaire pour statuer de la validité pour ceux qui utilisent les propriétés-en-acte liées à la conception causale.

120. Si :	*Enfin moi, j'en reste un peu à ce 3 pair implique 4 pair est une assertion vraie, moi ça me pose un peu un problème quand même. Parce que […] sachant que A est faux alors A implique B est une assertion vraie...heu...ça veut dire que tu oublies...ce qui est marqué après...*
133. X :	*En fait, c'est l'implication qui est vraie, c'est pas le résultat à la fin.*
134. Si :	*Oui oui, ben c'est ça qui me choque un peu. enfin, pourquoi pas ?...*
456. Si :	*soit on s'intéresse... aux assertions..., (…) à la vérité de P et de Q... (…) Soit on s'intéresse à est-ce que l'implication est vraie.*
470. S :	*C'est pas la même chose de toute manière puisqu'on n'a pas le même résultat.*

Après un certain temps, les deux étudiants acceptent la propriété « l'implication est vraie lorsque la prémisse est fausse » qui est présentée comme un théorème de logique par les autres.

• La quantification universelle dans le premier tableau est très présente dans les réponses bien qu'implicite. Cet implicite les empêche de faire la différence entre les deux tableaux.

306. C :	*Non mais je sais pas, c'est le soit k appartenant à, donc c'est quel que soit k...*

Les implications du premier tableau sont interprétées par Si A est vrai alors B est vrai, cela est conforme à ce que nous avions vu dans les manuels.

541. C :	*moi le petit a) je le lis vraiment en me disant, donc soit k quelconque, si k est pair alors k+1 est pair. Je le vois vraiment comme ça, donc du coup je...ne m'intéresse pas au cas où k est pair ou k impair, je dis si k est pair et je prends ça comme hypothèse...*

La quantification universelle est enfin mise en avant par un étudiant « il y a **deux réponses possibles suivant le statut que l'on attribue à k »**.

558. X :	*Autrement dit, est-ce qu'on fixe le k...(…) et après on regarde l'implication ou alors on dit, on regarde l'implication pour tout k appartenant à N...*

• Cependant, la question récurrente au cœur de ce débat est liée aux contenus sémantiques : doivent-ils être pris en compte pour donner la valeur de vérité de l'implication ou bien doit-on « oublier ce que l'on sait » et ne s'occuper que de la validité du lien explicatif ? On voit alors apparaître une **nouvelle conception** : **« En logique formelle, il n'y a pas besoin de regarder les contenus mathématiques ».**

57. Si :	*Oui mais alors tu dis que 3 pair c'est faux. (…) Mais si tu sais ça, ça veut dire que tu sais aussi que 4 pair est vrai... (...) Enfin tu, t'es pas que... sur la logique...*
112. S :	*Mais, en fait, là le problème, c'est de savoir ce qu'on suppose vrai et ce qu'on ne suppose pas vrai...*
246. X :	*Cet exercice est-ce qu'on peut pas le faire sans savoir que 3 est impair ?*
247. Si :	*Ben on peut. Mais c'est ça, on oublie...on oublie que 3 a une certaine propriété. Enfin pourquoi pas ? (...) Enfin, forcément moi j'ai l'impression qu'il faut quand même avoir des notions d'arithmétique…*

2.4.2. Point de vue ensembliste et implication

2.4.2.a) Quadrilatères

La question 3 n'a pas été comprise lors du questionnaire. Nous changeons la question en parlant de classes d'objets. Nous voulons vérifier notre hypothèse selon laquelle le rapport entre implication et inclusion est connu, même s'il n'apparaît pas spontanément comme outil de résolution.

On considère, dans l'ensemble des quadrilatères non croisés du plan, les propriétés suivantes :
P1 : Avoir des côtés opposés parallèles deux à deux.
P2 : Avoir des diagonales perpendiculaires entre elles.
P3 : Avoir quatre côtés égaux.
P4 : Avoir quatre angles droits.
Représentez les classes d'objets qui vérifient ces propriétés.

• Au cours du débat les étudiants acceptent le cadre ensembliste qui leur est suggéré alors qu'ils ne l'avaient pas utilisé lors du questionnaire.

Ils nomment les classes et ils utilisent des termes relatifs à la théorie des ensembles : *sous-ensemble*, « *patate* », *intersection*, et en traduisent d'autres : complémentaire par « *extérieur de la grande patate* », inclusion par « *ça contient* » ou *« dans »*.

• En revanche, les questions sur l'implication et celles sur les classes d'objets sont perçues comme très différentes, la première apparaissant plus simple.

1439. S :	*Mais c'était plus des implications donc on ne demandait pas tellement à savoir ce qui était inclus l'un dans l'autre.*
1440. Si :	*Oui on ne s'en serait peut-être pas servi comme support pour réfléchir à cette question.*
1441. O2 :	*Oui c'était ça. Pour vous c'est pas, ça ne vous apparaît pas comme une aide pour réfléchir éventuellement.*
1442. Si :	*Ben non parce que là, j'ai dû réfléchir pour le faire alors que ça me paraît simple quand je l'écris comme ça.*
1443. O2 :	*Alors c'était plus simple de voir en termes d'implications directement que...*
1444. Si :	*Oui.*

Nous faisons deux hypothèse expliquant le fait que le cadre ensembliste ne soit pas un outil. D'abord, les étudiants expriment que ce cadre leur est très peu familier. Ensuite, une propriété n'est presque jamais interprétée comme une classe d'objets dans l'enseignement.

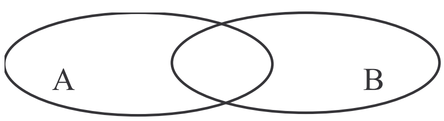
• Néanmoins, après avoir été confrontés aux deux cadres, les étudiants reconnaissent l'utilité du point de vue ensembliste : *aide mémoire, ça a l'air pratique*, *fort utile*.

2.4.2.b) Négation

Lors du questionnaire, la question de la négation a été très mal réussie. Pour vérifier notre hypothèse selon laquelle le cadre ensembliste est un outil de résolution à cette question, nous l'introduisons maintenant à l'aide des *patates*.

Pour que les étudiants aient un moyen de contrôle sur leurs productions, nous faisons deux groupes dont les réponses devront être compatibles.

A est l'ensemble des objets qui vérifient la propriété A
B est l'ensemble des objets qui vérifient la propriété B



Premier groupe :
Hachurez là où A ⇒ B est vraie.
Deuxième groupe :
Hachurez là où A ⇒ B est fausse.

• La question est très bien réussie.

• Les tables de vérité apparaissent comme un moyen de relier implication et inclusion.

En effet, un groupe établit les tables de vérité avant de hachurer le sous-ensemble correspondant à " A implique B ", l'autre s'en sert implicitement (utilisation du théorème en acte si A est faux alors A $\Rightarrow$ B est vrai) et donne la table de vérité après avoir hachuré.

2.4.3. Formulation de la négation de P $\Rightarrow$ Q

> *Revenons au questionnaire. Que répondez-vous maintenant à la question suivante ?*
> *Donnez la négation de P $\Rightarrow$ Q.*
> *Vous pourrez la donner sous forme d'expressions langagières, symboliques, graphiques...*

• L'équivalence sémantique de l'écriture P $\Rightarrow$ Q avec " Non P ou Q " n'est pas reconnue. Nous faisons l'hypothèse que c'est la conception causale-temporelle qui empêche cela.

• La question précédente, qui a pourtant été très bien réussie, n'a pas joué son rôle d'outil ensembliste. Les étudiants n'ont pas paru faire le lien entre les deux questions. Nous pouvons peut-être l'expliquer par le fait qu'ils sont, pour cette question, dans le point de vue propositionnel et qu'ils ne le mettent pas en relation avec le point de vue ensembliste.

• L'outil Contre-Exemple n'est pas utilisé dans la recherche de l'écriture de la négation, bien que cette notion leur soit familière. Nous pouvons supposer qu'ils sont « coincés » dans le point de vue propositionnel alors que les contre-exemples sont associés aux énoncés contingents.

La négation de l'implication *P implique Q* est dans un premier temps donnée sous la forme *P n'implique pas Q*, ou avec le symbole barré, ou encore *non (P implique Q)*. Cependant, il y a immédiatement le double constat que d'une part, cette écriture ne porte pas beaucoup de sens et que, d'autre part, elle n'est pas opérationnelle. Deux stratégies vont co-exister tout au long du débat. Elle correspondent à deux conceptions différentes sur le concept.

• Une première stratégie consiste à chercher la négation de l'implication sous la forme d'une nouvelle implication, on voit émerger différentes propositions.

1981.S :	*Si P est vrai alors Q n'est pas vrai. La négation.*
2026. X :	*C'est (Non Q) implique P, oui.*
2027. S :	*Non ! P implique (Non Q).*
2031. S :	*(Non P) implique (Non Q).*
2032. Si :	*(Non Q) implique P.*

L'échec de ces tentatives aboutit alors à la question collective suivante : la négation est-elle une implication ?

• Une seconde stratégie, utilisant la table de vérité, cohabite avec la première. La technique consiste alors à échanger les 0 et les 1 dans la colonne du tableau de vérité correspondant à " P implique Q ”. Cette stratégie aboutit à un quadruplet de 0 et 1 que les étudiants vont essayer d'exprimer en termes d'implication :

2191. Si :	*Alors, dans ce cas-là, il faut trouver...la formulation logique, qui...a pour tableau de vérité heu...0,0,1,0.*
2192. C :	*Oui, voilà*
2193. Si :	*Et ça qu'est-ce que c'est ? Ce serait pas " P implique (Non Q) " en tout cas. Ce serait...*
2195. X :	*Je pensais à " (Non Q) implique P ", moi.*

Or les valeurs du quadruplet sont une preuve que la phrase cherchée ne s'écrit pas sous forme d'implication (une implication est représentée, dans le tableau, par un seul “ 0 ”).

2202. C :	*...parce que, moi, j'ai l'impression que, quand il y a une implication, forcément on va avoir trois 1 à chaque fois.*

Cependant cet argument ne convainc pas tous les étudiants, en particulier Simon, qui va chercher jusqu'à la fin du débat sur la question une écriture sous forme d'implication.

La formulation “ P vrai et Q faux ”, directement lisible dans le tableau, est finalement proposée comme solution.

Cependant, elle n'est pas reconnue comme satisfaisante en particulier parce que cette écriture ne montre pas de rapport de cause à effet entre P et Q. En effet, le “ et ” est un lien symétrique et P et Q paraissent jouer le même rôle.

2256. S :	*Donc, en fait, la négation de " P implique Q ", ça serait P vrai et Q faux ?*
2257. Si :	*Oui. C'est ça que je trouve bizarre…*

• La dernière phase de ce débat va consister à chercher s'il existe un “ symbole ” permettant d'écrire la phrase autrement. La recherche d'une autre implication reste prégnante. Il n'y a pas d'accord sur la solution.

2.4.4. Vérifonctionnalité et Relation de causalité

Dans le questionnaire, les étudiants ont paru déstabilisés et la conception causale est ressortie très fortement. Nous proposons une réponse (inventée) pour relancer la discussion.

On rappelle les trois phrases :
P1 : Le soleil est une étoile
P2 : Il fait jour
P3 : Il fait nuit
Quelqu'un a dit : « (P2 $\Rightarrow$ P1) et (P3 $\Rightarrow$ P1) sont vraies ».
Qu'en pensez-vous ?

• Les rapports entre logique et langage naturel

Le débat porte sur la rigueur de l'un et le flou de l'autre.

2502. C :	*Non mais c'est pour ça que je dis ça parce que j'ai l'impression que, dans les expressions langagières comme ça, on peut l'interpréter de dix millions de façons différentes.*
2570. Si :	*Enfin, ce qui me pose problème, c'est que…on mélange la logique donc le monde de la rigueur avec…le monde réel qui est plus flou…*

et l'on voit apparaître la logique formelle comme outil-modèle de la logique naturelle

2422. Si :	*Enfin, si tu fais de la logique, tu ne fais pas de la logique uniquement pour la logique…C'est parce que ça…c'est pour fonder ce qu'on, ce qu'on dit, ce qu'on pense sur des…sur des bases solides.*

- Une conception très présente de l'implication indissociable de l'aspect déductif

Recherche d'un “ cheminement logique ” :

2725. O3 :	*Mais pourquoi ça n'implique pas ?*
2726. Si :	*Parce qu'il n'y a pas de cheminement logique de l'un à l'autre.*

Ce sont les connaissances du monde physique qui permettent de valider ou d'invalider les liens entre telle phrase et telle autre et non l'éventuelle vérité ou fausseté de ces phrases ce qui amène à remettre en cause la propriété logique acceptée dans la question sur les tableaux.

- Un doute sur la propriété de vérifonctionnalité

2775. C :	*Je crois qu'on avait mis une banale implication et, on a pas mal parlé de véracité à un moment donné puis, ouais, on a oublié l'implication.*

Après un débat où la différenciation « logique des propositions / logique des prédicats » apparaît implicitement (« pour que l'implication soit vraie, il ne suffit pas que P et Q soient vraies, il faut que tout le tableau soit vrai »), la propriété « l'implication est vraie lorsque la prémisse est fausse » est déstabilisée.

2681. C :	*Oui mais c'est pas parce que…parce que deux assertions sont vraies que ça…que P implique Q est vraie.*
2682. X :	*Ah ouais mais dans notre théorème on l'a dit !*
2683. C :	*Mais non mais, on a pas dit ça quand même ?* (Rires)
2684. X :	*Ben…si.*
2687. Si :	*Ah non mais, en fait, il fallait que <u>tout</u> le tableau de vérité soit vrai, pas que…*

Le débat finit sur la remise en question de cette propriété. Cela semble dû à la prégnance d'une conception causale.

2707. C :	*Ah oui, non mais on a dit des…on a dit n'importe quoi !* (Rires)
2708. O3 :	(s'adresse à Natacha) *Alors ce n'est pas parce que P est vrai et Q est vrai, que P implique Q est vrai ?*
2709. C :	*Ah ouais, non mais bien sûr, ça suffit pas.*
2710. O2 :	*Vous revenez sur les trucs d'avant ?*

2711. C : Ouais, ben, enfin on a dit ça ? Eh, on nous a drogués, moi je dis !

2.5. Quelques conclusions

- *Le lien entre l'implication et les ensembles est peu présent et paraît superficiel.* Bien que le lien formel entre inclusion et implication soit connu, le cadre ensembliste n'est jamais un outil de résolution. De plus, la non reconnaissance de la quantification universelle sous-jacente à l'implication représentée par l'inclusion est source d'erreur, notamment dans l'écriture de la négation de l'implication.
- *La vérifonctionnalité n'est pas connue.* Les deux propriétés-en-acte liées à la prémisse fausse (P4 a et P4b) sont également présentes, celles liées à la conclusion apparaissent peu.
- La *conception causale-temporelle de l'implication est très prégnante*. Elle empêche de différencier la condition nécessaire de la condition suffisante**.** *Elle peut cohabiter avec des connaissances de logique formelle* bien qu'elle s'oppose à la vérifonctionnalité de l'implication. Elle « ressort » dès que les étudiants sont déstabilisés.
- L'utilisation de l'implication dans les démonstrations ne va pas forcément de soi, comme par exemple, pour traduire une implication à deux entrées ou pour traduire l'expression « seulement si ». *Les contenus mathématiques ne semblent pas être toujours suffisants pour permettre d'écrire les implications « dans le bon sens ».*
- *Les implications paraissent très largement perçues comme implicitement universellement quantifiées.* Cependant, cet implicite n'est pas conscient et empêche de comprendre d'autres réponses dues à une autre interprétation de l'implication.
- *La négation de l'implication n'est pas familière*, à telle point qu'elle n'est pas reconnue comme telle par les étudiants qui la produisent. Les erreurs et la « non reconnaissance » sont dues à l'attente d'une autre implication pour formuler la négation de $P \Rightarrow Q$.

2.6. Une deuxième expérimentation

Certaines questions de notre mémoire ont été reposées dans le cadre d'une formation didactique (3 séances de 2h30) sur l'implication et le raisonnement en maîtrise de mathématique. Cette pré-expérimentation prend place à la suite de plusieurs séances sur l'implication. Deux problèmes issus de la thèse de Julien Rolland[54] [Rolland J., 1999] ont préalablement été résolus et analysés d'un point de vue didactique, les tables de vérité ont été données et expliquées. Il ne s'agit plus, ici, d'une situation diagnostique mais d'une situation devant permettre des apprentissages sur l'implication.

Le questionnaire est proposé individuellement et de façon anonyme à seize étudiants en maîtrise de mathématiques. Cependant, des échanges en petits groupes ont eu lieu. Deux questions sont posées, celle concernant les deux tableaux (1-2) et celle sur la logique naturelle « le soleil est une étoile » (1-3).

Nous ne présentons qu'une synthèse des résultats.

2.6.1. quantification universelle

Pour le premier tableau, 2 types de réponse :

- **Confirmation** de la quantification universelle implicite de l'implication.

La réponse 1 (cf. analyse préalable) majoritairement donnée (14 étudiants /16)montre une quantification universelle implicite.

- **Nouveauté** par rapport aux précédents résultats et **confirmation** de l'analyse préalable

Apparition de la réponse 2 (cf. analyse préalable) attendue montrant que k est traité comme un élément fixé dont on ne connaît pas la parité. (2 étudiants /16)

Pour le deuxième tableau, 2 types de réponse :

- **Infirmation** des précédents résultats : la propriété-en-acte « A $\Rightarrow$ B est fausse lorsque A est fausse » n'apparaît plus.

La réponse 2 (cf. analyse préalable) associée à la propriété logique « A $\Rightarrow$ B est vraie lorsque A est fausse » est très majoritaire (15 étudiants / 16). Cette présence majoritaire est liée à l'introduction des tables de vérité.

---

[54] activité *A si B* p. 213 : il s'agit de choisir parmi une dizaine de phrases celles qui sont équivalentes à la formulation A si B.
activité sur les losanges p. 232 : il s'agit de déterminer entre 3 propriétés sur les losanges lesquelles sont nécessaires ou suffisantes pour les autres.

C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que les outils *table de vérité* et *cadre logique* apportent des éléments qui permettent aux étudiants de s'affranchir, au moins en partie, des conceptions liées à la logique naturelle.

- **Nouveauté** par rapport aux précédents résultats et **confirmation** de l'analyse préalable :

Apparition de la réponse fausse 1 (cf. analyse préalable) qui reprend les réponses associées à la quantification universelle, avec la justification « on prend k=3 » (1 étudiant / 16).

Cette réponse ne tient pas compte des valeurs de vérité des propositions et ne se base que sur le lien explicatif pour statuer sur la véracité des implications proposées.

Quelques nouveautés sur les justifications :

- apparition de l'outil contraposée (1 seule copie).
- apparition de l'outil table de vérité.

2.6.2. Implication et logique naturelle

Un premier constat est que, pour la plupart de ces étudiants, toutes les implications sont susceptibles d'être traitées, contrairement aux réponses du premier corpus. On voit apparaître l'utilisation des tables de vérité comme outil pour la résolution et la justification.

Le classement des réponses est plus difficile pour cette question néanmoins nous avons distingué 3 types de réponses selon les valeurs de vérité attribuées aux implications concernant P3 et P2.

Premier type : utilisation de la **table de vérité.** (3 copies sur 16)

> *P3 ⇒ P2 est vraie si P2 est vraie.*

Deuxième type : utilisation du **raisonnement naturel.** (11 copies sur 16)

> *P2 ⇒ P3 et P3 ⇒ P2 sont fausses car P2 est la négation de P3.*

Troisième type : **Pas d'implication** entre P2 et P3. (2 copies sur 16)

Ce classement prend sens pour nous parce qu'il rend compte, d'une certaine manière, du conflit entre l'implication de la logique formelle et l'implication de la logique naturelle. Voici deux résultats de l'étude des productions.

- La vérifonctionnalité est en partie utilisée.

L'apport de la table de vérité permet, dans ce nouveau corpus, de donner un statut de vérité à certaines implications comme P2 ⇒ P1ou P3 ⇒ P1 qui sont données vraies en raison de la vérité de P1. (11 copies sur 16)

- Les réponses ne sont cependant pas toujours conformes aux tables de vérité.

Les implications P2 ⇒ P3 et P3 ⇒ P2 sont données majoritairement fausses pour la raison que l'une est la négation de l'autre. (11 copies sur 16)

On peut donner deux hypothèses à ce dernier constat :

D'abord, le statut de vérité de P2 et P3 doit être décidé (on suppose que « il fait jour » est vrai) alors que celui de P1 n'est que constaté (« le soleil est une étoile » est vrai). On peut alors supposer que les étudiants ne reconnaissent pas cette décision comme étant de leur ressort et qu'il ne leur est donc pas possible de décider des implications.

La seconde hypothèse est que donner pour vraie une implication de la forme P ⇒ Non P va à l'encontre de la logique naturelle, puisqu'une implication de cette forme n'est vraie que lorsque P est fausse.

2.6.3. Quelques constats

Cette deuxième expérimentation nous permet de faire le constat qu'un travail préalable sur l'implication et notamment sur les tables de vérité permet de faire évoluer les réponses.

Cependant, nous avons observé, ici encore, que, lorsque les questions les déstabilisent, les étudiants ont toujours recours à une conception causale de l'implication. En particulier, la recherche d'un lien explicatif entre P et Q, et donc la non reconnaissance de la vérifonctionnalité de l'implication, sont prédominantes.

Cette conception causale, issue de la logique naturelle est renforcée par les manuels et l'utilisation habituelle de l'implication dans l'enseignement. Pourtant, nous avons montré qu'elle est cause d'erreurs, notamment dans la distinction des connaissances nécessaires et suffisantes.

D'autre part, cette étude confirme le fait que les implications sont majoritairement quantifiées implicitement. Ceci est renforcé par la restriction du point de vue ensembliste sur l'implication à la seule inclusion dans l'enseignement. Or nous avons montré que ceci amène des difficultés notamment dans la compréhension de la négation de l'implication.

Nous faisons donc le constat que :

La connaissance du cadre logique n'est pas suffisante pour avoir une connaissance de l'implication idoine à l'objet mathématique.

Ce qui nous amène à formuler l'hypothèse :

La connaissance de l'implication sous le point de vue ensembliste, est nécessaire pour permettre ceci.