Chapitre 4

Les questions de notre recherche, méthodologie et cadre théorique

1. Questions de la recherche et hypothèses de recherche

Notre problématique de recherche s'inscrit dans le cadre des travaux didactiques sur la démarche scientifique menés par l'équipe *Combinatoire Naïve et Apprentissages Mathématiques* du laboratoire[55] *Leibniz*-IMAG de Grenoble. Ces travaux concernent l'enseignement des savoirs transversaux tels que la *modélisation* [Rolland J., 1999], la *définition* [Ouvrier-Buffet C., 2003] et les situations-recherche-en-classe [Godot K., thèse en cours] et [Grenier D., Payan C., 1998 & 2003].

Nous avons commencé l'étude de ce concept en nous posant des questions sur le statut de l'implication dans l'activité mathématique et sur sa *vie* dans l'enseignement. Ces questions étaient :

[55] Les membres de l'équipe participent à de nombreuses actions de formation (interventions depuis l'école primaire jusqu'à la formation des professeurs) et de vulgarisation (participations à la fête de la science). Ces travaux et actions ont abouti à la création de l'ERTé *Maths à Modeler* en partenariat avec d'autres chercheurs, sous la direction de Sylvain Gravier (laboratoire Leibniz).

Quel est l'objet mathématique implication ?
Quel enseignement de l'objet implication ?
Quels sont les *rapports personnels* de futurs enseignants à l'objet implication ?

Ces recherches nous ont permis de faire quelques constats que nous présentons.

L'analyse de manuels montre que le cadre ensembliste est quasiment absent de l'enseignement alors que le cadre déductif est le plus représenté, la définition du concept étant même confondue, dans certains manuels de seconde, avec celle du concept naturel. D'autre part, aucune relation n'est explicitée entre les différents cadres apparaissant dans ces manuels.

Les travaux de Julien Rolland [Rolland J., 1999] et nos pré-expérimentations, tous deux présentés au chapitre précédent, nous amènent au second constat qu'il y a des difficultés liées à l'implication, même pour des étudiants en maîtrise de mathématiques ou des PLC2. Plus particulièrement, nous avons montré que ces difficultés sont très fortement liées à une *conception causale* de l'implication. Or cette conception, issue de la logique naturelle, est renforcée par les pratiques de l'enseignement qui n'offrent quasiment pas d'alternative au point de vue déductif : il n'y a pas d'enjeu de vérité dans les problèmes usuels, l'hypothèse est vraie, la conclusion aussi, et même l'implication est présentée vraie puisque la question est réduite à *démontrer que*.

Enfin, notre pré-expérimentation en maîtrise, présentée au chapitre précédent, nous a montré que, contrairement à une idée courante, avoir des connaissances en logique formelle, et en particulier connaître les tables de vérité, ne suffit pas à régler ces difficultés, et ne suffit pas à supprimer la conception causale.

À la suite de ces constats, nous avons recentré notre problématique autour de l'hypothèse suivante :

Il est *nécessaire* de connaître et *d'établir un jeu dialectique* entre les *trois cadres, logique formelle, ensembliste* et *raisonnement déductif,* pour une bonne appréhension et une bonne utilisation de l'implication.

En particulier :

Sans un point de vue ensembliste sur l'implication, il n'est pas possible d'accéder à l'utilisation correcte et à la compréhension « complète » de ce concept mathématique.

La *thèse* que nous soutenons est que cette condition sur le jeu de cadres est *suffisante.*

Pour vérifier ces hypothèses et étudier notre thèse, nous essayons de répondre à la question suivante :

Comment à l'aide de différentes situations relevant de différents cadres *problématiser* l'implication, dans l'objectif d'une meilleure connaissance de ce concept ?

2. Cadre théorique et méthodologie

Pour répondre à cette dernière question, nous avons construit une ingénierie didactique que nous avons testée dans deux classes de PLC2 en mathématiques, sur les sites de Grenoble et Chambéry de l'IUFM de l'académie de Grenoble. Cette ingénierie a été conçue pour problématiser l'implication en mettant en jeu les cadres du *raisonnement déductif*, de la *logique formelle* et, plus particulièrement, le cadre *ensembliste*.

Pour concevoir cette ingénierie, nous nous sommes appuyée sur la théorie des situations de Guy Brousseau [Brousseau G., 1986]. Nous faisons une *analyse a priori* de notre situation en termes de stratégies, de choix de valeurs des *variables didactiques* et de *rétroactions du milieu*. Nous adoptons le point de vue didactique, issu des théories Piagetiennes, qui prend l'activité de l'apprenant comme moyen nécessaire de la construction de ses connaissances. Notre ingénierie a pour but de permettre, et même de provoquer, une modification des connaissances des PLC2 par le biais de situations pour lesquelles le cadre ensembliste est nécessaire pour la résolution du problème. Nous comprenons évidemment dans le *milieu* les débats contradictoires à l'intérieur des groupes. La phase de recherche a été suivie d'une phase *d'institutionnalisation*, prise en compte officielle de nouvelles connaissances sur l'implication.

Ces connaissances nouvelles ne concernent pas des objets nouveaux à proprement parler. Les PLC2 connaissent tous le concept mathématique d'implication. Cependant, ce concept étant rarement enseigné, la connaissance de ce concept est souvent réduite à l'utilisation de *propriétés-en-acte* [Vergnaud, 1990]. Les propriétés-en-acte relevant de la conception *causale-temporelle* étant les plus répandues. La *théorie des champs conceptuels* [Vergnaud, op.cit.] nous a aidée à modéliser les connaissances des étudiants dans nos premiers travaux. Cette ingénierie doit permettre aux PLC2 de remettre en cause cette *conception causale-temporelle* véhiculée par la logique naturelle et confortée par le raisonnement déductif.

Pour cela, à l'instar de Régine Douady [Douady R., 1986], nous soutenons que les jeux de cadres sont nécessaires à l'appréhension du concept dans sa globalité. Notre ingénierie propose donc des problèmes pour la résolution desquels les différents cadres, déductif, logique et ensembliste, interviennent. Soit qu'ils soient nécessaires à la résolution et doivent cohabiter, soit qu'ils donnent des réponses différentes et doivent être confrontés au sein du groupe. Le cadre déductif étant le plus, sinon le seul, connu, nous cherchons surtout, par cette ingénierie, à rendre efficaces les cadres logique et ensembliste.

3. Choix généraux pour notre ingénierie

3.1. Choix du public

Notre ingénierie a été réalisée dans le cadre d'une session de formation des PLC2[56] sur le raisonnement et la preuve, dans les deux sites Grenoble et Chambéry de l'IUFM de Grenoble. Ce public nous a paru très pertinent pour deux raisons.

D'abord, les PLC2 sont des étudiants expérimentés en mathématiques puisqu'ils ont suivi au moins trois années après le bac et une année de préparation au concours. Ils sont d'ailleurs recrutés en grande partie sur leurs compétences mathématiques. Pour ces raisons, ils utilisent très souvent l'implication, et ceci de manière naturelle, ce concept n'ayant, à leur avis, aucun secret pour eux.

D'autre part, les PLC2 sont des professeurs débutants qui doivent enseigner les mathématiques à leurs élèves. Pour cela, ils auront besoin au moins de l'outil implication si ce n'est du concept. Non seulement ils devront le maîtriser mais de plus ils seront confrontés à des élèves qui ne savent pas comment l'utiliser et qui ne reconnaissent pas ses propriétés. Nous avons d'ailleurs vu, par exemple chez Durand-Guerrier [Durand-Guerrier, 1996], comment les pratiques des *habitués* des mathématiques, dont les professeurs, contenaient des implicites incompris des élèves.

C'est pourquoi nous avons jugé opportun de leur donner les moyens de revenir sur leurs connaissances de l'implication, de les mettre à l'épreuve et d'en construire de nouvelles. Ceci, non seulement pour qu'ils aient eux-mêmes une vision plus entière du concept et qu'ils le maîtrisent mieux, mais aussi pour qu'ils permettent à leurs élèves de construire ce concept à l'aide des différents cadres.

[56] Professeurs des Lycées et Collèges en deuxième année de stage à l'IUFM. Ces professeurs ont réussi le CAPES ou l'Agrégation de mathématique (concours de recrutement de l'enseignement secondaire français) à la fin de l'année précédente et sont en année de stage. Ils ont une classe en responsabilité, en collège ou lycée, et suivent des cours à l'IUFM deux jours par semaine. Ils n'ont donc plus vraiment le statut d'étudiant sans avoir vraiment atteint le statut de professeur puisque c'est à la fin de cette année de stage qu'ils seront recrutés ou non.

3.2. Variables globales pour notre ingénierie didactique

3.2.1. Types d'objets : objets institutionnels / objets non institutionnels

On peut choisir de travailler sur des objets *institutionnels* ou non *institutionnels*. Nous appelons *objets institutionnels* des objets qui ont une forte présence dans l'enseignement des mathématiques et qui, pour cela, sont connus voire très bien connus du public auquel s'adresse la situation. Par exemple, nous considérons que le parallélogramme est un *objet institutionnel* à partir de la fin du collège, tandis que le graphe n'en est pas un pour la plupart des élèves jusqu'à la fin du lycée[57], voire même de l'université.

Comme nous l'avons dit dans le dernier paragraphe de notre analyse épistémologique, lorsqu'un problème mathématique concerne une classe d'objets très institutionnels, certaines propriétés de ces objets sont implicites, comme la convexité par exemple dans les problèmes de géométrie usuels. Pour la résolution, on se place implicitement dans cette classe d'objets très connus et l'on utilise les propriétés, très connues aussi, de ces objets. Nous faisons l'hypothèse que le cadre déductif est alors favorisé.

En revanche, lorsque la classe d'objets n'est pas institutionnelle, les propriétés des objets ne sont pas connues. On ne peut plus se placer dans cette classe pour la résolution puisque l'on ne connaît pas les objets. Nous faisons l'hypothèse que, non seulement, ceci défavorise l'utilisation du cadre déductif, mais que, de plus, cela favorise celle du cadre ensembliste. En effet, il faut alors utiliser explicitement les propriétés des objets de l'ensemble de départ.

Nous avons choisi de proposer deux problèmes l'un portant sur des objets « très » institutionnels et l'autre sur des types d'objets non institutionnels. Notre situation de géométrie met en jeu des quadrilatères et des propriétés d'objets très familières (côtés égaux, côtés parallèles...). Au contraire, notre situation sur les polyminos met en jeu des objets (polyminos) et des propriétés (pavable, équilibré...) très probablement inconnus des PLC2 puisque absents de l'enseignement.

Le choix d'une situation concernant des objets géométriques très institutionnels est motivé par le public visé. En effet, il nous semble que les professeurs stagiaires se sentent plus « concernés », a priori, par des problèmes de géométrie que par des problèmes de mathématiques discrètes, sur les pavages de polyminos par exemple. Il leur paraît plus légitime de travailler sur des objets qui sont dans les programmes scolaires du secondaire. Dès lors, non seulement il nous est plus facile de dévoluer notre tâche mais, de plus, nous pouvons engager des réflexions avec eux sur la façon de travailler le raisonnement dans leur propre classe.

---

[57] Le graphe est récemment devenu un objet institutionnel, puisqu'il fait partie des programmes de Terminale ES spécialité Mathématiques depuis 2002.

Cependant, comme c'est le cadre ensembliste que nous voulons favoriser dans cette situation, il faut choisir parmi ce type d'objets, une classe d'objets qui ne soit pas elle-même institutionnelle, c'est-à-dire dont les propriétés ne soient pas connues, ni facilement reconnaissables.

3.2.2. Types de tâches : élaboration de preuves / analyse de preuves

Deux types de tâches différents peuvent être envisagés pour problématiser l'implication. D'une part, la construction d'une preuve, d'autre part, l'analyse d'une preuve écrite. Pour nous, la construction d'une preuve demande un enjeu de vérité fort, ce qui n'est pas le cas habituellement dans l'enseignement. Le premier type oblige à la recherche, de conjectures, d'exemples ou de contre-exemples, alors que le second type oblige au contrôle, que ce soit le contrôle du résultat ou le contrôle des outils et des pas d'inférence. Nous faisons l'hypothèse que ces deux types de tâches permettent et obligent un travail sur l'implication et le raisonnement en général. C'est pourquoi, notre situation propose ces deux types de tâches.

3.2.3. Mise en jeu des trois cadres : logique / ensembliste / raisonnement déductif

Dans nos précédentes expérimentations, nous avions privilégié l'étude de l'implication dans les cadres de la logique formelle et de la logique naturelle. Au vu des résultats et de nos nouvelles hypothèses de recherches, annoncés au paragraphe 1, nous avons choisi de favoriser le cadre ensembliste.

Nous nous sommes attachée à ce que nos problèmes permettent la mise en œuvre du cadre ensembliste et/ou logique pour la résolution, considérant que le cadre déductif sera toujours présent pour peu que les problèmes ne soient pas uniquement posés dans le cadre logique. De plus, les problèmes sont construits pour que le cadre ensembliste soit un cadre efficace et même nécessaire de résolution.

3.2.4. Organisation sociale : Travail individuel / Travail en groupe

Notre hypothèse est que le travail de groupe est nécessaire pour que notre situation « fonctionne » bien. Ce choix de travail favorise les échanges et les débats, il est indispensable pour qu'une confrontation puisse avoir lieu entre les différents points de vue sur l'implication.

Le travail individuel, quant à lui, permet à chacun d'essayer une piste de résolution dans le cadre qui lui convient. Cela permet à chacun de « cerner » le problème et de voir la limite de son cadre de résolution. Chacun peut se faire « un avis » sans que les stagiaires dont les avis sont habituellement « dominants » puissent faire accepter le leur comme le meilleur. Cette phase individuelle est, pour nous, un préalable nécessaire pour nourrir le débat à venir. C'est de cette première recherche individuelle que découlera la richesse des argumentations sur l'intérêt des différentes résolutions et l'utilité des différents points de vue.

Notre hypothèse est donc que la recherche individuelle et la recherche collective sont nécessaires à notre situation. Comme dans la situation du *puzzle* de G. Brousseau, cette variable est constitutive de notre situation. C'est la cohabitation de ces deux types d'organisation qui permet la confrontation des arguments. Or, c'est lors de cette confrontation que des contradictions entre des conceptions sur l'implication à peu près stables peuvent apparaître.

3.3. Contraintes comme choix de variables pour notre ingénierie

Nous présentons ici des contraintes des situations de notre ingénierie. Ce sont, en réalité, des valeurs de variables que nous avons choisies car elles nous paraissent nécessaires pour les apprentissages que nous visons, comme nous allons le justifier.

3.3.1. Les objets mathématiques sont faciles d'accès

Pour qu'un apprentissage puisse se faire sur l'implication, il ne faut pas que des difficultés dues aux objets mathématiques viennent interférer. Pour cela il nous faut des objets de savoir simples qui ne mobilisent pas tout l'énergie. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que l'on ne peut observer un travail sur l'implication, et le raisonnement en général, que si les objets mathématiques en question sont simples et connus du public.

De plus, il faut que l'observateur ait les moyens de distinguer les erreurs liées à l'utilisation du concept d'implication de celles liées aux objets mathématiques. Les objets mathématiques simples sont une bonne réponse puisqu'ils permettent d'éviter, ou du moins de réduire considérablement, les erreurs dues aux objets mathématiques.

Nous faisons alors deux hypothèses :

- Lorsque les objets abordés sont depuis longtemps connus et pratiqués par le public visé, comme c'est le cas de la géométrie de collège par des PLC2, le travail s'effectue sur le raisonnement.

- Les exercices de pavages de polyminos, mettant en jeu des objets nouveaux mais facilement et rapidement appréhensibles, permettent aussi un travail sur le raisonnement.

3.3.2. Les enjeux de vérité et de découverte sont présents

Si on donne un exercice du type « Montrez que A $\Rightarrow$ B, où A et B sont connus », on place d'emblée le problème dans le cadre du raisonnement déductif. Il n'y a aucun enjeu de découverte ou de vérité. Or, nous faisons l'hypothèse qu'il est nécessaire qu'il y ait une question suffisamment *problématisée* pour qu'il y ait un apprentissage sur le raisonnement. En effet, pour que la dévolution du problème se fasse sur le raisonnement et non pas uniquement sur les propriétés des objets il faut que la question soit suffisamment complexe, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de réponse immédiate, et l'enjeu de vérité réel. Pour le détail des possibilités de problématisation de la question, le lecteur pourra se référer au dernier paragraphe de l'analyse épistémologique.

D'autre part, nous faisons l'hypothèse qu'un réel enjeu de vérité et/ou de découverte favorise une résolution dans le cadre ensembliste. En effet, l'interprétation en termes d'ensembles est alors nécessaire ou tout au moins économique.

3.3.3. Les implications en jeu ne sont pas des CNS[58]

En géométrie scolaire beaucoup d'implications sont des équivalences. On ne se pose que rarement la question de différencier la condition nécessaire de la condition suffisante puisque les caractérisations sont des équivalences. De plus, lorsque l'on essaie de faire cette différence, cela apparaît artificiel. Par exemple, au collège, alors que les enseignants présentent *le théorème de Pythagore* (implication) puis *la réciproque du théorème de Pythagore*, les élèves ont beaucoup de difficultés, dans les exercices, à savoir s'il faut justifier par l'implication directe ou l'implication réciproque. Autre exemple, le fait de travailler par équivalences dans le traitement des équations, et de ne pas même les écrire parfois, pose problème lors du traitement des inéquations, les élèves ne sachant plus dans quel sens l'implication est vraie. Nous faisons l'hypothèse que cette habitude de travailler avec des équivalences ne permet pas de différencier les conditions nécessaires des conditions suffisantes.

Il faut donc, pour problématiser l'implication, que les problèmes ne portent pas uniquement sur des équivalences. C'est pourquoi, nous proposons des situations, celle de géométrie comme celle sur les polyminos, où de nombreuses implications en jeu ont des réciproques fausses. Notre situation montre que, contrairement à une idée très répandue, il est possible de construire des problèmes de géométrie où les implications ne sont pas des équivalences.

[58] CNS : conditions nécessaires et suffisantes

3.3.4. Le choix du support papier-crayon

Dans la situation de géométrie, les raisonnements mathématiques sont basés sur des constructions géométriques qui vérifient certaines propriétés. Une partie de la tâche consiste à faire ensuite varier certains paramètres (longueur des rayons, distance entre A et B, position de D sur le cercle, angle aigu ou obtus...). Un logiciel de géométrie permettant la manipulation d'objets géométriques faciliterait évidemment cette phase de recherche. Cependant, la présence de ce support ne nous permettrait pas de vérifier si le point de vue ensembliste est mobilisable. En effet, il semble que, dans ces conditions, nous n'ayons pas les moyens de distinguer la manipulation d'ensembles de la manipulation d'une figure.

D'autre part, nous faisons l'hypothèse que ce support peut même être un frein à l'apparition du point de vue ensembliste. En effet, il y a des difficultés, pour ceux qui utilisent les logiciels à repérer le rôle de la figure dans leur preuve. Ce rôle n'est, le plus souvent, même pas mis en question et les manipulations de la figure sont plus un effet du contrat lié à ce support qu'un effet de l'utilisation du point de vue ensembliste. Puisque le point de vue ensembliste est, d'une certaine manière, pris en charge par le logiciel, cela dispense l'élève de l'avoir. C'est pourquoi nous avons choisi un environnement *papier-crayon* pour notre situation de géométrie.

4. Quelques critères d'identification de l'utilisation des différents cadres dans les productions

Il faut que nous nous donnions les moyens de repérer, dans les productions, le travail fait sur l'implication et les moyens de distinguer les différents cadres utilisés.

Nous considèrerons révélateurs d'un travail sur l'implication, en particulier toutes les questions et débats portant sur les condition nécessaires et suffisantes ou la validité d'une implication. Dans nos analyses des tâches, nous avons classé les stratégies selon qu'elles relèvent plutôt d'un cadre ou plutôt d'un autre. Cependant, les stratégies des PLC2 seront probablement moins facilement attribuables à un cadre. C'est pourquoi, nous nous donnons en plus quelques critères, sur les ostensifs, pour identifier les arguments relevant d'un cadre ou d'un autre.

Les problèmes ne portant pas à utiliser des tables de vérité, nous considèrerons caractéristiques d'un travail dans le cadre logique, l'utilisation explicite des connecteurs logiques, les arguments théoriques sur les conditions nécessaires et suffisantes.

L'utilisation de *patates*[59] représentant des ensembles est peu attendue. En effet, bien que nous ayons vu dans notre analyse épistémologique que c'est un ostensif du cadre ensembliste et qu'il puisse être un outil de résolution dans certaines tâches de notre situation, en particulier géométrie 2, ce n'est pas un objet institutionnel. Nous repèrerons donc le cadre ensembliste dans la recherche d'exemples et de contre-exemples, dans les réponses en termes d'ensembles et d'inclusion et dans l'utilisation de quantificateurs.

[59] Diagrammes de Venn