

Chapitre 5

Présentation de notre ingénierie

Nous présentons ici, une ingénierie de formation pour un apprentissage de la preuve et plus particulièrement de l'implication. Nous l'avons construite en respectant les choix généraux et les contraintes que nous avons présentés dans le chapitre précédent. L'analyse, mathématique et didactique, de cette situation sera faite dans le prochain chapitre.

1. Le public

Cette situation s'adresse à des PLC2, professeurs stagiaires des lycées et collège. Nous avons déjà expliqué la pertinence de ce choix dans le chapitre précédent. Nous tenons à ajouter que les deux situations, *géométrie 1* et *polymino1*, peuvent être proposées à des publics moins expérimentés en mathématiques. D'une part, le problème *géométrie 1* ne porte que sur des connaissances de géométrie de niveau collège. D'autre part, le problème général sur les pavages de polyminos, dont est issu notre problème *polymino1*, a déjà été proposé par les chercheurs de notre équipe à de

nombreux niveaux entre le cycle 3⁶⁰ de primaire et la fin de l'université [Grenier D., Payan.C, 1998 & 2003].

L'expérimentation a eu lieu, dans le cadre d'une formation sur le raisonnement et la preuve, dans deux classes de PLC2 en mathématiques de l'IUFM de Grenoble, l'une sur le site de Grenoble, l'autre sur le site de Chambéry, pendant l'hiver 2001.

2. L'organisation matérielle

Nous avons mis en place notre ingénierie de formation sur deux séances de trois heures à une semaine d'intervalle. En réponse à la variable didactique *organisation sociale*, chaque situation s'est composée d'une recherche personnelle, entre 5 et 15 minutes, puis d'une recherche en petits groupes de 4 ou 5 personnes. Les stagiaires ont eux-mêmes formé les groupes, par affinités personnelles. Les groupes n'ont pas eu d'échanges entre eux, sauf lors de la phase d'institutionnalisation à la fin de la dernière séance.

Un observateur suivait la recherche de chaque groupe, pendant qu'un magnétophone enregistrait leurs débats. L'observateur avait pour consigne de ne pas intervenir dans le déroulement de la recherche. Son rôle était de noter les observations qu'il jugeait importantes, expliquer le sens des énoncés des problèmes, faire répéter ou éclaircir certains arguments flous et enfin relancer la recherche quand cela était nécessaire.

En réponse à notre contrainte, la recherche s'est faite dans un environnement *papier-crayon*.

3. L'organisation didactique

En réponse à notre variable didactique, notre ingénierie comporte deux types de tâches. La première séance est consacrée à l'élaboration de preuves, en géométrie d'une part, avec le problème *Géométrie 1*, et sur les pavages de polyminos d'autre part, avec le problème *Polymino 1*. La seconde séance porte sur l'analyse de preuves dans les deux domaines, avec les problèmes *Polymino 2* et *Géométrie 2*.

⁶⁰ Cycle 3 de l'école primaire : CE2, CM1, CM2, élèves entre 8 et 11 ans

Cette organisation nous permet de voir *fonctionner* l'implication lors de la construction de preuves dans les deux contextes, puis de re-problématiser, au cours de la deuxième séance, les difficultés, erreurs et questions apparues lors de la première. Cela permet, pour certains groupes, de revenir sur des difficultés qui n'ont pas été résolues à la première séance, et pour d'autres d'attirer leur attention sur des thèmes qui n'ont pas encore été discutés et qui sont susceptibles de stimuler un débat. Cette méthode, que nous avons utilisée dans notre pré-expérimentation [Deloustal, 1999] s'était avérée efficace pour amorcer le débat et permettre de confronter les différents points de vue sur l'implication.

De plus, nous leur demandons, lors de cette deuxième séance, leur avis en tant que professeur. Nous faisons une première hypothèse sur le fait que cela nous permettra une bonne dévolution de la situation, et une seconde hypothèse sur le fait qu'il y aura des débats sur ce qu'on appelle couramment la *rigueur* d'une preuve, sur ce qu'on est en droit d'attendre d'élèves de collège, sur la recevabilité d'une preuve...

4. Les énoncés des problèmes

Les énoncés sont rapportés ici, tels qu'ils ont été proposés aux PLC2 lors de l'expérimentation.

4.1. Situation Géométrie 1

Soit ABCD un quadrilatère qui a deux côtés opposés de même longueur.
À quelles conditions sur les diagonales a-t-on :

- (P1) 2 autres côtés parallèles entre eux ?
- (P2) 2 angles droits ?
- (P3) 2 autres côtés de même longueur (entre eux)⁶¹ ?

⁶¹ L'expression *de même longueur* signifie ici qu'ils sont égaux entre eux et non pas qu'ils sont égaux aux deux premiers, cela a été confirmé oralement aux stagiaires.

4.2. Situation Géométrie 2

Rappelons le texte du problème :

Soit ABCD un quadrilatère qui a deux côtés opposés de même longueur.
À quelles conditions sur les diagonales a-t-on :

(P3) les 2 autres côtés sont de même longueur (entre eux) ?

Une condition nécessaire et suffisante est que « les diagonales se coupent en leur milieu » (*on l'appellera C1*).

Que pensez-vous de l'échange suivant ?

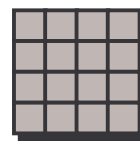
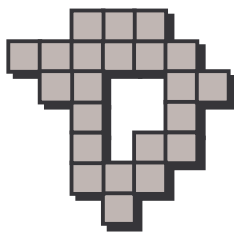
X : Mais attends, la condition "une des diagonales coupe l'autre en son milieu" est peut-être aussi une condition nécessaire et suffisante ! (on l'appellera C2)

Y : Impossible puisque cette condition (C2) est strictement plus faible que (C1) !

4.3. Situation Polyminos 1

Définitions :

- **Polymino** : assemblage connexe de cases carrées (c'est-à-dire qui se touchent par un côté) dans le plan. (Le polymino est en « un seul morceau », une case doit être reliée à une autre par un côté et non uniquement par un coin)



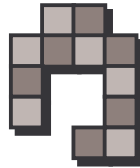
- **Domino** : polymino à 2 cases.
- **Taille** d'un polymino : nombre de cases du polymino.
- **Pair** : un polymino est pair si sa taille est paire.

- **Paver** un polymino par des dominos : recouvrir entièrement et sans chevauchement un polymino à l'aide de dominos.

Dans ce cas-là, on dira qu'un polymino est **pavable** par des dominos.



- **Équilibré** : Si l'on colorie le polymino en damier, il est dit équilibré lorsque le nombre de cases blanches est égal au nombre de cases noires.



Question :

Soit P1, P2 et P3 les propriétés suivantes d'un polymino :

- (P1) : pavable (par des dominos)
- (P2) : équilibré
- (P3) : pair

Quelles sont les relations entre ces propriétés ?

Rédigez une preuve satisfaisant tout le groupe.

4.4. Situation Polyminos 2

Reprenons les propriétés d'un polymino définies dans le premier problème :

P1 : *pavable* et P2 : *équilibré*.

1 - On examine l'implication $P1 \Rightarrow P2$.

Voici une preuve proposée par certains et refusée par d'autres :

Un domino couvre une case blanche et une case noire. Si un polymino est pavable, il est recouvert par k dominos et ces k dominos recouvrent k cases blanches et k cases noires, donc il est équilibré.

Donnez votre avis sur cette preuve.

Auriez-vous une réponse différente en tant que mathématicien et en tant qu'enseignant ?

2- On examine l'implication $P2 \Rightarrow P1$.

Voici une preuve proposée :

Dans un polymino équilibré de $2n$ cases, il existe 2 cases voisines : ces deux cases sont de couleurs différentes et correspondent à un domino. On retire ce domino. On obtient alors un polymino équilibré de taille $2(n-1)$. En répétant ce procédé, on arrive à un polymino équilibré à deux cases. Ceci démontre que le polymino était pavable.

Donnez votre avis sur cette preuve.

Justifiez.