Chapitre 6

Quelques éléments de réflexion sur les objets géométriques et leurs représentations

1. Les quadrilatères

Les classes de quadrilatères peuvent être définies sous deux points de vue différents selon que l'on privilégie les côtés ou les sommets. Voici deux définitions illustrant notre propos.

> *Quadrilatère : Polygone à quatre côtés*
> *Polygone : Figure le plus souvent plane formée par une ligne polygonale fermée, suite de segments (côtés), dont chacun a une extrémité commune (sommet)avec le précédent et le suivant.*
> *[Le Petit Larousse, 2003]*
>
> *Quadrilatère : Quadruplet (A, B, C, D) de points de l'espace non alignés trois à trois. Les segments AB, BC, CD et DA sont appelés les côtés du quadrilatère et les points A, B, C et D ses sommets.*
> *[Bouvier A., George M., Le Lionnais F., 1996]*

La première définition, basée sur une appréhension perceptive du quadrilatère, est celle utilisée dans la géométrie scolaire. C'est un point de vue géométrique classique dans lequel les quadrilatères sont différenciés par leur aspect visuel et donc par leurs propriétés sur les côtés (égaux, parallèles...), sur les diagonales (égales, perpendiculaires...) ou sur les angles (aigus, droits, obtus...). En particulier, on différencie deux classes, celles des quadrilatères dont deux côtés se coupent, quadrilatères croisés, et celle des quadrilatères dont les côtés ne se coupent pas. Dans les quadrilatères non croisés, on différencie encore deux grandes classes selon que tous les angles entre les sommets sont inférieurs à 180°, quadrilatères convexes, ou qu'il en existe un supérieur à 180°, quadrilatère concave.

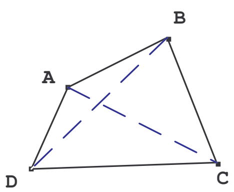
La deuxième définition se réfère à un *point de vue combinatoire* sur les quadrilatères. Un quadrilatère est défini par 4 points (sommets) du plan. On a alors six couples de sommets avec lesquels on obtient trois paires de couples de sommets disjoints. Une paire de couples de sommets *disjoints* forme les diagonales alors que les deux autres paires de couples forment les côtés. C'est-à-dire que, le segment reliant deux sommets peut être un côté ou une diagonale, les deux diagonales n'ayant aucun sommet commun. Étant donnés quatre points, on peut définir trois quadrilatères différents.

On peut distinguer deux façons de placer les quatre points dans le plan :

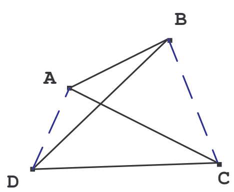
- Soit aucun des points n'est dans l'enveloppe convexe des trois autres
- Soit il en existe un, et donc un et un seul, dans l'enveloppe convexe des trois autres

Le premier cas regroupe les quadrilatères *convexes* et les quadrilatères *croisés*. Quatre points étant fixés, pour un choix de diagonales on obtient un convexe et pour les deux autres choix on obtient des quadrilatères croisés. Dans cette approche combinatoire les quadrilatères croisés et non croisés ont le même statut. On peut démontrer que les quadrilatères convexes sont ceux dont les segments diagonales se coupent. Par définition, les quadrilatères croisés sont ceux dont deux côtés opposés se coupent.

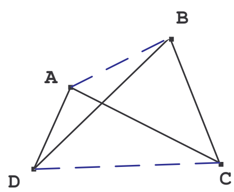
On peut passer d'un quadrilatère convexe donné aux deux quadrilatères croisés associés en « lisant » les côtés comme des diagonales et les diagonales comme des côtés. C'est ce que nous illustrons par les exemples ci-dessous où les diagonales sont marquées par les segments pointillés.



ABCD



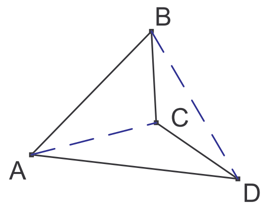
ABDC



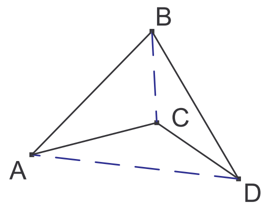
ACBD

Le second cas correspond aux quadrilatères *concaves*. Lorsqu'un point se trouve dans l'enveloppe convexe des trois autres, le graphe complet[62] sur ces quatre sommets, construit en représentant les arêtes par des segments est plan. Les quadrilatères concaves sont donc ceux dont les segments opposés, côtés ou diagonales, ne se coupent pas. Par conséquent, avec les quatre sommets on définit trois quadrilatères différents qui sont tous concaves, comme l'illustre le schéma suivant.

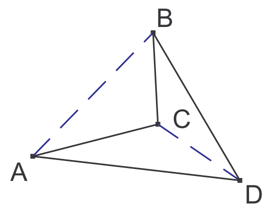
[62] Un graphe complet est un graphe tel que deux sommets quelconques sont reliés.



ACDB



ABCD



ADBC

Ce point de vue combinatoire sur les quadrilatères favorise l'étude des objets géométriques dans le cadre ensembliste. Il est pourtant absent de l'enseignement secondaire français. C'est ce point de vue que nous adopterons pour la résolution du problème de géométrie dans le cadre ensembliste.

2. Dessin, figure, figure ensembliste

En géométrie, les figures peuvent être considérées comme des notions *paramathématiques*[63]. Bien qu'elles ne soient jamais définies dans l'enseignement des mathématiques, les enseignants ont des exigences quant à leur lecture et leur construction par les élèves.

Il est courant dans les recherches didactiques et dans l'enseignement de faire la différence entre *dessin* et *figure*. Soit un objet géométrique donné, défini par des propriétés, Parzysz (1988, p.80) distingue la *figure géométrique*, une idée, une création de l'esprit, du *dessin* qui n'en est qu'une représentation.

Dans l'enseignement, cette différence est en fait *écrasée*. La distinction entre *dessin* et *figure* se fait entre une représentation *particulière* de l'objet géométrique, un *dessin*, et une représentation déclarée *quelconque*, la *figure*, avec toute l'indétermination que peut laisser le mot *quelconque*.

Les enseignants marquent cette différence, par exemple, lorsqu'ils disent à leurs élèves *qu'on ne peut pas conclure d'après le dessin puisqu'un dessin est toujours un cas particulier*. Pour contourner cette difficulté, ils enjoignent leurs élèves à dessiner une *figure non particulière,* censée être générique ou *quelconque*, c'est-à-dire de représenter un élément n'ayant aucune propriété autre que celles de la classe à laquelle il appartient. Si l'on doit représenter un parallélogramme, on ne représentera pas un rectangle, si l'on doit représenter un triangle, on ne représentera ni un triangle isocèle ni un triangle rectangle. Le contrôle effectué pour éviter la *particularité* du dessin est essentiellement visuel, la reconnaissance des objets géométriques se faisant avant tout de manière perceptive

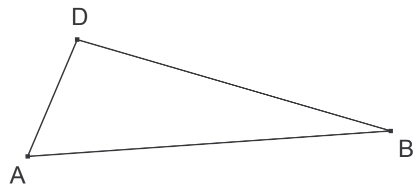
[63] cf. la définition donnée par Y. Chevallard dans notre introduction.

comme nous l'avons déjà dit. Pour mettre en valeur les propriétés qui appartiennent réellement à l'objet géométrique et pas seulement à la représentation, on utilise souvent le codage : angles droits, longueurs égales... Il n'est pas toujours facile de dessiner un élément sans particularités, c'est pourquoi les figures *prototypiques*, c'est-à-dire celles que l'on dessine le plus souvent lorsque l'on veut représenter un élément d'une classe donnée, sont si prégnantes dans l'enseignement des mathématiques.

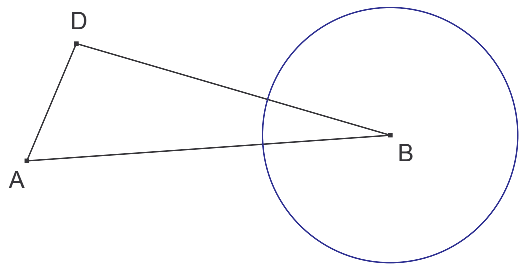
Le but de travailler sur cette figure *quelconque* est de pouvoir travailler sur un élément que l'on considèrera *générique* de la classe et que l'on prendra comme représentant. Cependant, quelle que soit la *non particularité* du dessin en jeu, il n'en reste pas moins que ce dessin représente un objet particulier de sa classe. Nous soutenons que, même lorsque la figure ne présente aucune particularité visible, elle ne représente pas forcément tous les objets de la classe. Ceci peut avoir des conséquences dans une démonstration, comme nous le décrivons ci-après.

Supposons que nous cherchions tous les quadrilatères ABCD ayant deux côtés opposés égaux, par exemple AD = BC et les deux autres côtés parallèles, i.e. (AB) // (DC).

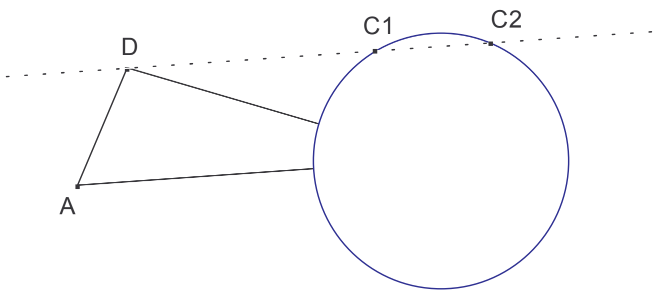
Quel que soit le quadrilatère vérifiant cette propriété, les trois points ABD formeront un triangle. Dessinons donc un triangle quelconque ABD.



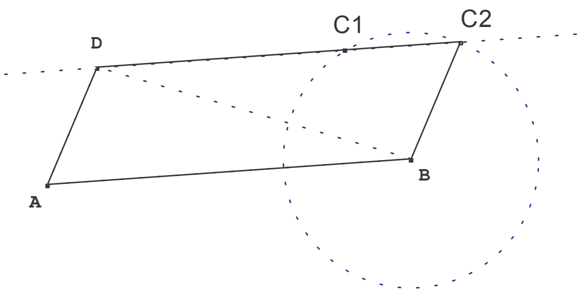
Pour vérifier AD = BC, il faut que C soit sur le cercle de centre B et de rayon AD.



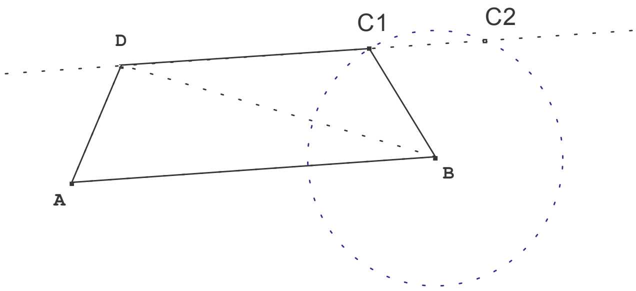
Pour vérifier (AD) // (BC), il faut que C appartienne à la droite parallèle à (AB) et passant par D. Il y a, ici, deux points d'intersection du cercle et de la droite.



On trouve ainsi deux éléments de la classe que nous cherchons, un parallélogramme et un trapèze isocèle.

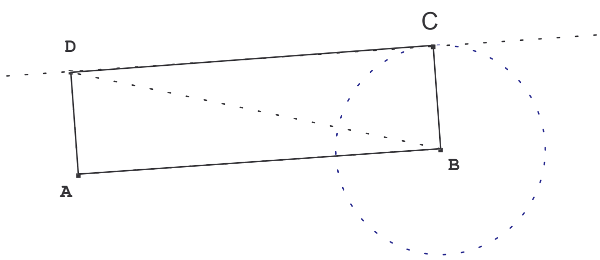


[Parallélogramme ABC_2D]



[Trapèze isocèle ABC_1D]

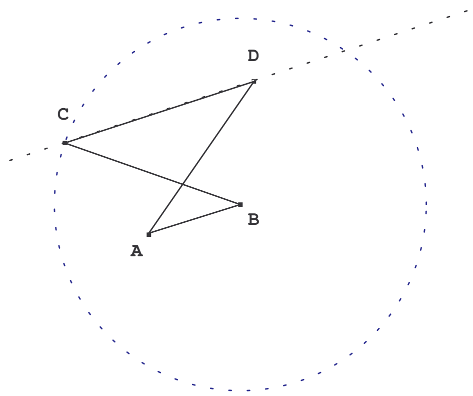
Si la parallèle à (AB) passant par D n'a qu'un point d'intersection avec le cercle de centre B et de rayon AD, nous obtenons un rectangle.



Le rectangle appartenant à la classe des parallélogrammes et à la classe des trapèzes isocèles, notre conclusion reste donc que l'ensemble des quadrilatères ayant deux côtés égaux et les deux autres côtés parallèles est l'ensemble des parallélogrammes et des trapèzes isocèles.

Notre démonstration étant construite sur un triangle prétendument générique, nous devons obtenir l'ensemble complet des solutions.

Cependant, le quadrilatère croisé ci-dessous vérifie bien les deux propriétés formant l'hypothèse.



Le triangle ABD ci-dessus est, de façon perceptive, tout aussi quelconque que le précédent, mais ici D est à l'intérieur du cercle de centre B et de rayon AD (car AB < AD).

Le premier triangle que nous avions choisi *quelconque* vérifiait, en fait, la propriété *D n'est pas à l'intérieur du cercle de centre B et de rayon AD*.

Nous avons voulu montrer sur cet exemple combien il est difficile de contrôler qu'un élément d'un ensemble est quelconque et qu'il est bien un élément générique de cet ensemble.

Les enseignants rencontrent cette difficulté, quand ils disent à leurs élèves *ton quadrilatère est trop comme cela, tu vois, il aurait fallu qu'il soit plus comme ceci*. La plupart du temps, pour qu'on puisse prendre un objet comme élément générique de sa classe, il suffit qu'il ne vérifie pas les propriétés les plus évidentes comme *avoir un angle droit*, *avoir des côtés égaux*, *avoir deux côtés parallèles, être croisé*... Cependant, il existe des cas, comme dans la démonstration précédente, où le triangle qui paraît bien quelconque visuellement ne peut pas être pris comme un représentant de sa classe. Dans ces cas-là il est très difficile de justifier devant l'élève que son triangle est moins bon que celui du professeur, rien ne permettant de le savoir à l'avance.

La distinction entre *dessin* et *figure* proposée par l'enseignement paraît insuffisante, il faut donc revenir à une distinction plus forte. C. Laborde et B. Capponi réinterprètent la distinction figure-dessin de B. Parzisz à l'aide du triangle référent-signifiant-signifié.

> *En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente, le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du*

référent. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. Dans cette approche, les rapports entre un dessin et son référent construits par un sujet, lecteur ou producteur du dessin, constituent le signifié de la figure géométrique associé pour ce sujet.
[...]
En tant que signifiant, d'un objet géométrique, le dessin rend compte de propriétés de cet objet mais ne le fait que partiellement. On peut attacher un domaine de fonctionnement au dessin (ensemble des propriétés géométriques représentées par certaines des propriétés spatiales du dessin). Ainsi un dessin ne rend-il pas compte du domaine de variation des éléments de l'objet géométrique. A partir d'un dessin, il est impossible d'inférer si un point d'un segment appartient au seul segment ou à la droite support du segment, si deux cercles sécants le sont par hypothèse ou peuvent être dans une position relative quelconque
[Laborde C., Capponi B., 1994]

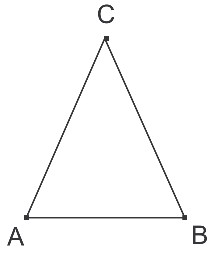
A la suite de cette citation, nous voyons l'importance de *la variation des éléments de l'objet géométrique* pour dépasser le statut de dessin et atteindre le statut de figure. Ainsi, c'est en tenant compte de cette variation que l'on peut passer d'un élément quelconque d'une classe d'objet à un élément générique représentant de cette même classe d'objets.

Nous soutenons l'hypothèse qu'avoir un *point de vue ensembliste* sur les objets permet ce passage du dessin à la figure et de l'élément quelconque à l'élément générique. Avoir un point de vue ensembliste revient, dans ces cas, à ne travailler ni sur un dessin ni sur une figure au sens scolaire mais à avoir présente à l'esprit ce que nous appellerons une *figure ensembliste*.

Une *figure ensembliste*, n'est pas la représentation d'un élément de l'ensemble, mais la représentation *envisageable* de tous les éléments de cet ensemble. Une *figure ensembliste* doit être *dynamique*, les points peuvent se déplacer dans les limites fixées par les propriétés définissant l'appartenance à l'ensemble. Une *figure ensembliste* ne peut donc être réduite à une reproduction physique sur une feuille, l'action de la pensée est nécessaire pour prendre en compte le fait que les points décrivent des ensembles.

Utiliser une *figure ensembliste* dans la résolution d'un problème du type précédent signifie garder présent à l'esprit le fait que les points varient et en tenir compte dans la construction des différentes configurations. L'utilisation de la *figure ensembliste* permet alors d'atteindre, de façon certaine, l'exhaustivité des configurations qui sont solutions.

Nous montrons, ci-dessous, sur deux exemples, comment nous différencions le *dessin*, la *figure* au sens scolaire et la *figure ensembliste*.



Dessin

Triangle isocèle particulier

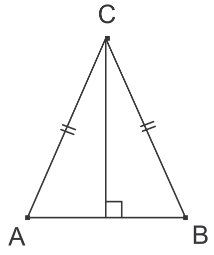


Figure au sens scolaire

Les propriétés du triangle sont comprises dans la figure (qu'elles soient notées explicitement ou non)

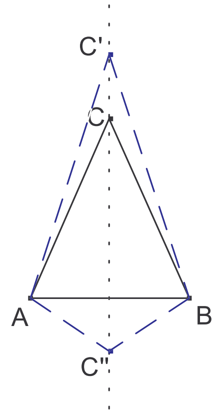
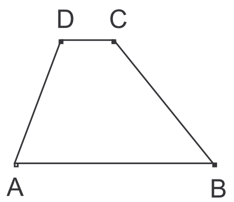


Figure ensembliste

Lorsque le point C décrit la médiatrice, on atteint l'ensemble des triangles isocèles.



Dessin

Trapèze particulier

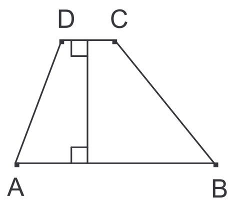


Figure au sens scolaire

Un trapèze a deux côtés parallèles.

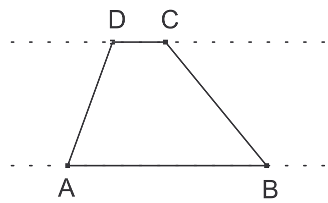


Figure ensembliste

Les points A, B, C et D décrivent les deux droites qui sont parallèles, on atteint ainsi l'ensemble des trapèzes de hauteur donnée, croisés ou non. Pour se restreindre aux trapèzes non croisés, on interdit l'interversion de A et B (resp. C et D) sur la droite concernée.

Pouvoir travailler sur *l'élément générique* d'une classe pour faire une démonstration est une caractéristique des mathématiques. Cependant l'élément générique est très difficile à atteindre par une figure et il faut de nombreux contrôles, tout au long de la preuve, pour garantir que celle-ci ne cache pas des propriétés particulières. En réponse à cette difficulté, la *figure ensembliste* remplace l'élément générique par l'ensemble des éléments en parcourant toute la classe, alors que la figure scolaire le réduit à un élément quelconque. Le contrôle s'exerce au départ, lorsqu'on prend un élément quelconque et plus après.

L'utilisation de la figure ensembliste, et donc du cadre ensembliste, semble plus nécessaire pour certaines classes d'objets que pour d'autres. En effet, si l'on s'intéresse à la classe des quadrilatères qui ont deux côtés égaux, il est difficile de trouver un « bon représentant », aucun élément ne paraît assez quelconque pour représenter tous les objets de cette classe. En revanche, lorsque l'on est sur les parallélogrammes, on peut facilement travailler à partir d'un élément qui paraît être suffisamment quelconque et que l'on considère générique, c'est en général le parallélogramme *prototypique*.

Nous ne prétendons pas que l'utilisation de la *figure ensembliste* soit facile. Au contraire, la prise en compte du dynamique pendant la résolution rend celle-ci plus délicate. Nous soutenons simplement que l'utilisation de la *figure ensembliste* est un moyen efficace de *contrôle* de l'exhaustivité des configurations obtenues quand l'utilisation du *dessin* ou de la *figure* ne permet pas toujours ce contrôle.

Il peut être aussi possible d'aller au-delà de la *figure scolaire* en contrôlant le caractère générique de l'élément tout au longe de la résolution. Pour cela, on utilise une *figure générique*, qui prend en compte la possibilité de toutes les configurations à chaque ajout de propriété. Cependant, ce contrôle peut être fastidieux. Nous montrerons sur un exemple, lors de notre analyse a priori, comment la figure générique peut être utilisée.

Nous verrons dans la suite combien le contrôle cette exhaustivité est source de difficulté dans nos problèmes.

3. Trapèzes et parallélogrammes

La classe des parallélogrammes est un sous-ensemble de quadrilatères très institutionnels dans l'enseignement secondaire français. De très nombreuses propriétés et théorèmes les concernant sont enseignées, par exemple, l'équivalence suivante dans les quadrilatères est bien connue des élèves :

Avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu $\Leftrightarrow$ *être un parallélogramme.*

Certaines classes de parallélogrammes particuliers sont aussi très étudiées comme celles des rectangles, losanges et carrés. Elles sont souvent considérées par les élèves comme des classes bien distinctes, ceci pour différentes raisons.

La raison principale paraît être l'appréhension visuelle des objets. On est capable de différencier, de manière perceptive, un carré d'un rectangle, un carré d'un losange (s'il est bien orienté dans la feuille), un losange d'un parallélogramme qui n'en est pas un..., pour peu évidemment que le rectangle ne soit pas *presque* un carré sans en être mathématiquement un ! Visuellement nous établissons donc des classes distinctes, sans intersections.

Il n'est pas rare, d'ailleurs, de voir des professeurs des écoles demander à leurs élèves de trier des carrés et des rectangles comme faisant partie de deux ensembles différents. On peut trouver par exemple, en maternelle, la consigne : *entoure en rouge les triangles, en vert les rectangles et en bleu les carrés.* Le professeur n'attend pas dans ce cas-là que les carrés soient entourés à la fois en vert et en bleu, la solution attendue est que les carrés soient entourés en bleu et que tous les rectangles, à l'exception des carrés, soient entourés en vert. Cette discrimination basée sur la perception visuelle renforce le cloisonnement des différentes classes.

Une autre raison est que, dans l'enseignement secondaire, si l'on veut démontrer une propriété des carrés, on se restreint en général à cette classe, sans essayer d'étudier son prolongement aux rectangles ou aux losanges. On ne prend pas une approche ensembliste pour la résolution de la question.

Enfin, M. Legrand propose le *principe du maximum d'information*, que nous avons déjà présenté, comme explication de cette coupure :

> *Signalons deux exemples typiques d'application de ce principe en classe :*
> *a) refus pour beaucoup d'élèves de considérer un carré comme un rectangle. Car si on sait que c'est un carré et que l'on dit : « c'est un rectangle ! » on ne donne pas toute l'information que l'on détient !*
> *[Legrand M., 1983 p. 71]*

Les trapèzes sont beaucoup moins étudiés que les parallélogrammes. La classe des trapèzes n'est d'ailleurs pas toujours définie de la même façon dans l'enseignement secondaire français, comme le montre C. Ouvrier-Buffet [Ouvrier-Buffet C, 2003] à partir d'un débat dans les bulletins de l'APMEP (n° 419, 422, 426) entre 1998 et 2000.

> *Rappelons tout d'abord quelques particularités des définitions de « trapèze » en usage dans la plupart des manuels des années 80 : quelques définitions excluent d'entrée de jeu le cas du trapèze croisé, car il est d'usage de ne considérer que des quadrilatères convexes. En général, un trapèze est défini comme un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles. [...] Ainsi certains[64] [manuels] précisent que deux côtés sont parallèles, les deux autres ne l'étant pas. M-J. Perrin-Glorian, assurant que « les professeurs des écoles ont besoin de définitions sûres et cohérentes », considère comme raisonnable qu'un parallélogramme soit un trapèze particulier et ajoute que « si l'on voulait exclure les parallélogrammes, pour démontrer qu'un quadrialtère est un trapèze, il faudrait non seulement montrer qu'il a deux côtés opposés parallèles, mais aussi qu'il a deux côtés opposés non parallèles.*
> *[Ouvrier-Buffet C, 2003]*

Ainsi, de la même façon que les ensembles des rectangles, des losanges et des carrés sont implicitement cloisonnés dans l'ensemble des parallélogrammes, les ensembles des

[64] Collection M. Monge – 6ème – 1981, cité par Ouvrier-Buffet

parallélogrammes et des trapèzes sont cloisonnés dans l'ensemble des quadrilatères et parfois même explicitement : par définition.

Le dictionnaire des mathématiques [Bouvier A., George M., Le Lionnais F.,1996] donne une définition qui rassemble sous le terme trapèze la plus grande classe parmi celles proposées, celle des quadrilatères ayant deux côtés opposés parallèles.

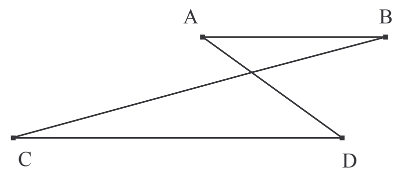
> *Trapèze : quadrilatère plan ayant deux côtés non consécutifs parallèles, appelés bases du trapèze.[…]*
> *[Bouvier A., George M., Le Lionnais F.,1996]*

D'après cette définition les parallélogrammes sont inclus dans l'ensemble des trapèzes. Pourtant, dans la définition des parallélogrammes, rien ne rappelle qu'ils sont des trapèzes particuliers :

> *Parallélogramme : quadrilatère plan dont les côtés sont parallèles deux à deux. Un quadrilatère (A, B, C, D) est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales AC et BD ont même milieu.[…]*
> *[Bouvier A., George M., Le Lionnais F.,1996]*

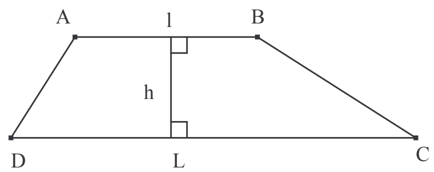
Rien n'explicite l'inclusion des parallélogrammes dans les trapèzes, les ensembles paraissent séparés, comme c'est souvent le cas dans l'enseignement.

D'autre part, d'après cette définition, il existe des trapèzes croisés comme le montre l'exemple ci-dessous qui est bien un *quadrilatère plan avec deux côtés non consécutifs parallèles* :



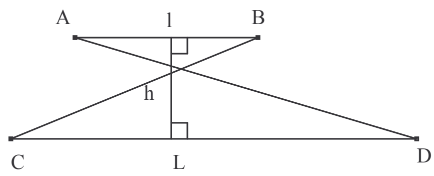
Cependant, la propriété donnée à la suite de la définition par le dictionnaire semble en contradiction avec cela :

> *Trapèze : [...] Une perpendiculaire abaissée d'une base sur une autre est une hauteur. Si les longueurs des bases et des hauteurs sont respectivement L, l et h, l'aire du trapèze est h × (l+L) / 2.*



> *[Bouvier A., George M., Le Lionnais F.,1996]*

Cette propriété n'est évidemment vraie que sur les trapèzes non croisés. L'aire enfermée du trapèze croisé ci-dessous est : $[(h/2) \times (L^2+l^2)] / (L+l)$.



Les auteurs du dictionnaire ont-ils simplement oublié de restreindre cette propriété aux trapèzes non croisés ou bien est-ce leur définition qui se réduit implicitement aux trapèzes non croisés ? Rien ne permet de conclure, il y a donc là une incohérence qui renforce bien le *flou* laissé par les manuels dans la définition du trapèze. Notons, cependant, que si l'on oriente les bases, la formule donnée par le dictionnaire peut être considérée comme correcte lorsque l'on s'intéresse à l'aire algébrique du trapèze.

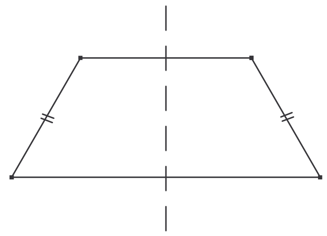
La définition du trapèze isocèle pose alors de nombreuses questions et diffère d'un manuel à l'autre provoquant même parfois des contradictions. C. Ouvrier-Buffet reprend quelques échanges sur cette définition parus dans les bulletins de l'APMEP.

> *[M-J. Perrin-Glorian] remarque par ailleurs une contradiction relevée dans certains manuels[65] au sujet de la définition du trapèze isocèle : un trapèze isocèle y est défini comme « trapèze qui a deux côtés opposés de même longueur ». Malgré cette définition, l'existence d'un axe de symétrie est donnée dans les propriétés des trapèzes isocèles. Or d'après cette définition, un losange est un trapèze isocèle. Il s'ensuit une discussion sur la ou les propriétés permettant de définir un trapèze isocèle [...]. Cette discussion a été reprise quelques mois plus tard par N. Gérald (Bulletin APMEP n° 422) [...] [qui] propose une autre définition de la même classe d'objets.[...] Ces échanges ont déclenché une réaction de S. Turnau (Bulletin APMEP n° 426).*
> *[Ouvrier-Buffet C, 2003]*

On voit combien la définition d'un trapèze isocèle peut être *floue* voire même *contradictoire* puisqu'un parallélogramme est un trapèze ayant deux côtés de même longueur (si l'on accepte que les parallélogrammes soient des trapèzes), c'est-à-dire que c'est un trapèze isocèle selon certains manuels, mais il n'admet pas d'axe de symétrie.

La définition du trapèze isocèle dans le dictionnaire des mathématiques déjà cité nous paraît aussi très intéressante :

> *Trapèze isocèle : Trapèze qui a deux côtés non parallèles de même longueur. Il admet un axe de symétrie.*

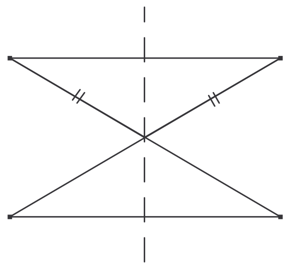


> *[Bouvier A., George M., Le Lionnais F.,1996]*

[65] Bareil-Zehren, Hachette – 6ème – 1981, cité par Ouvrier-Buffet

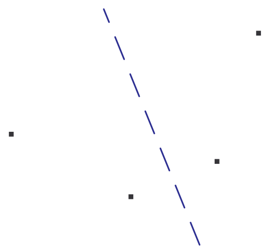
Cette définition *deux côtés non parallèles de même longueur*, en ajoutant *non parallèles* permet d'éliminer les parallélogrammes. Mais alors, en éliminant *toute* la classe des parallélogrammes, elle élimine aussi les rectangles. Les rectangles ne sont donc pas considérés comme des trapèzes isocèles.

En revanche, rien dans la définition du trapèze isocèle ne permet d'exclure le quadrilatère croisé associé au rectangle :

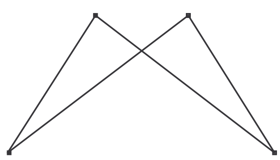


On peut aussi choisir la définition combinatoire du trapèze isocèle basée sur ses sommets :

> *Un trapèze isocèle a pour sommets deux points du plan non confondus et les images respectives de ces deux points par une symétrie axiale, l'axe ne passant par aucun de ces points.*



Pour obtenir un quadrilatère non dénaturé (deux points confondus) il ne faut pas que l'axe de symétrie passe par l'un des sommets. Le choix fait ici élimine les losanges, dont les axes de symétrie passent par l'un des sommets, de la classe des trapèzes isocèles. En revanche, il inclut dans la classe des trapèzes isocèles, tous les trapèzes, même croisés, ayant deux côtés égaux. Il inclut aussi le quadrilatère croisé ci-dessous :



Ce quadrilatère n'a pas deux côtés parallèles, certains peuvent pour cela vouloir l'exclure de la classe des trapèzes[66]. La définition est alors à modifier.

De cette petite analyse, nous voulons faire ressortir que la classe des trapèzes n'est pas une classe définie de la même façon dans toutes les *institutions transposant* le savoir mathématique. Par exemple, dans certaines définitions les trapèzes peuvent être croisés, dans d'autres non. Il en résulte que nous considèrerons dans la suite que les trapèzes sont des objets *connus* par une personne ayant suivi l'enseignement secondaire français, puisqu'ils font partie des savoirs enseignés mais qu'ils ne sont pas *très connus* ou tout au moins pas aussi bien connus que les parallélogrammes.

Nous voulons aussi attirer l'attention du lecteur sur le fait que les parallélogrammes ne sont que rarement considérés explicitement comme des trapèzes. En particulier le rectangle est toujours rattaché à la classe des parallélogrammes, et beaucoup plus rarement rattaché à la classe des trapèzes isocèles.

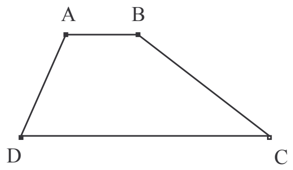
Pour notre étude, nous faisons des choix sur les définitions des objets *trapèze* et *trapèze isocèle* que nous allons expliciter.

> *Nous appellerons trapèze un quadrilatère* **convexe** *qui a deux côtés opposés parallèles.*

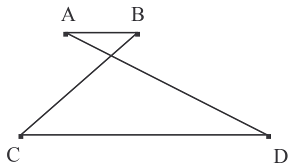
Ainsi, nous considèrerons les parallélogrammes comme des trapèzes particuliers mais nous n'accepterons pas de trapèzes croisés sous l'appellation *trapèze*. L'élimination des croisés dans l'appellation *trapèze* nous paraît pertinente *pour notre étude*, car nous avons montré que les quadrilatères croisés n'étaient pas des objets connus, il nous paraît donc intéressant de différencier les croisés dans la résolution de nos exercices. Ce choix n'entraîne pas pour nous un « oubli » de la classe des trapèzes croisés mais il nous permet simplement de faire référence, sous l'appellation *trapèze*, à des quadrilatères convexes.

Nous appellerons *trapèze croisé* et *quadrilatère croisé papillon associé au trapèze* les deux quadrilatères ci-dessous :

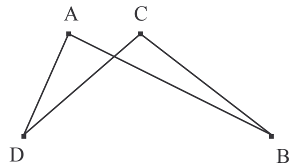
[66] On pourrait aussi considérer que ce croisé associé au trapèze isocèle appartient à la classe des parallélogrammes, si l'on définissait ceux-ci comme ayant de côtés opposés de même longueur. Cette définition représente un parallélogramme articulé.



trapèze



trapèze croisé



croisé papillon associé au trapèze

D'autre part :

> *Nous appellerons trapèze isocèle un trapèze ayant un axe de symétrie ne passant par aucun de ses sommets*

Nous considérons donc les rectangles comme des trapèzes isocèles particuliers (ils ont deux axes de symétrie), contrairement aux autres parallélogrammes qui n'en sont pas. En particulier, l'axe ne symétrie ne devant contenir aucun sommet, les losanges ne sont pas, ici, des trapèzes isocèles. L'ensemble des rectangles est, pour nous, l'intersection de l'ensemble des trapèzes isocèles avec l'ensemble des parallélogrammes.