Chapitre 7

Analyse a priori des situations

Analyse mathématique et didactique de la tâche.
Intérêt de la confrontation des deux types de situations, Géométrie et Polyminos

Nous présenterons dans un premier temps une analyse mathématique et didactique de la tâche pour les quatre situations *Géométrie 1* & *2* et *Polyminos 1* & *2*. Nous détaillons différentes stratégies et explicitons les choix de variables faits pour chaque situation. Nous montrerons, alors, l'intérêt pour notre ingénierie de confronter les situations *Géométrie* et *Polyminos* en détaillant les points communs et les différences entre les deux.

1. Situation *Géométrie 1*

Rappelons le texte du problème.

Soit ABCD un quadrilatère qui a deux côtés opposés de même longueur. À quelles conditions sur les diagonales a-t-on :

(P1) 2 autres côtés parallèles entre eux ?

(P2) 2 angles droits ?

(P3) 2 autres côtés de même longueur (entre eux)[67] *?*

Dans la suite de l'analyse nous appellerons :

- H : La propriété avoir deux côtés opposés de même longueur
- P1 (H étant vérifiée) : La propriété avoir les deux autres côtés parallèles entre eux
- P2 : La propriété avoir deux angles droits
- P3 (H étant vérifiée) : avoir les deux autres côtés de même longueur (entre eux)
- Nous appellerons H, P_1, P_2 et P_3 les ensembles associés à ces propriétés.

1.1. Type de tâche et questionnement

La tâche consiste à répondre, à l'aide des connaissances sur les objets et les propriétés de la géométrie classique aux questions :

H *et (*A *?)* $\Rightarrow$ *(ou* $\Leftarrow$ *?)* H et Pi[68]

A étant la condition sur les diagonales cherchée.

On peut soit considérer que les conditions à chercher sont des conditions suffisantes soit considérer que ce sont des conditions nécessaires puisque rien ne le précise mathématiquement dans notre énoncé. Si l'on s'intéresse à l'implication :

Sous H, A *?* $\Rightarrow$ Pi

[67] Rappelons que *de même longueur* signifie qu'ils sont égaux entre eux et non pas qu'ils sont égaux aux deux premiers.
[68] Il n'est pas nécessaire d'écrire H et P1 puisque la propriété H est comprise dans la propriété P1 par définition, cependant nous avons préféré le rajouter pour des questions de clarté. Idem pour P3.

La condition A cherchée est une *condition suffisante pour* Pi, alors que si l'on s'intéresse à l'implication :

Sous H, Pi $\Rightarrow$ A *?*

La condition A cherchée est alors une *condition nécessaire* à Pi.

Nous présentons ici quatre approches du problème pouvant induire des stratégies différentes.

La première approche pose la question des *conditions suffisantes* (première stratégie proposée). Il est possible de lister des conditions classiques sur les diagonales (diagonales de même longueur, diagonales perpendiculaires...) puis de contrôler le fait que ces conditions, additionnées à l'hypothèse H, impliquent la conclusion Pi. Cette approche replace le problème dans le cadre du point de vue déductif et permet de trouver des conditions suffisantes à Pi.

La deuxième approche se rapporte à des *objets connus* (deuxième stratégie proposée). Certains quadrilatères qui vérifient à la fois H et Pi sont bien connus, par exemple les carrés, les rectangles, les parallélogrammes. Or les propriétés de leurs diagonales sont elles aussi bien connues. Cependant, si elle permet de trouver quelques conditions de façon très économique, cette approche ne renseigne pas quant à l'exhaustivité des résultats. Toutes les configurations ne sont pas atteintes a priori, on n'a aucun moyen pour contrôler que la condition finale est nécessaire.

La troisième approche pose la question des *conditions nécessaires et suffisantes* (troisième et quatrième stratégies proposées). Quels sont les objets qui vérifient à la fois l'hypothèse H et la conclusion Pi ? Et quelles sont les propriétés de leurs diagonales ? Cette approche est fondamentalement ensembliste. Puisque l'on cherche l'ensemble A tel que son intersection avec l'ensemble H soit égale à l'ensemble *Pi* (en termes de propriétés : A tel que (H et A) $\Leftrightarrow$ Pi), il est naturel de chercher auparavant l'intersection de l'ensemble H avec l'ensemble *Pi*, c'est-à-dire les objets qui vérifient à la fois la propriété H et la propriété Pi. Pour étudier les objets qui vérifient (H et Pi), on utilise une figure ensembliste au sens où nous l'avons définie. Il y a alors deux stratégies possibles, soit se placer dans H et ajouter la propriété Pi, soit se placer dans *Pi* et ajouter la propriété H. La première stratégie est plus proche du texte du problème mais la seconde est plus facile d'accès au moins pour P1, il semble en effet plus facile de représenter deux côtés parallèles que deux côtés opposés égaux.

Enfin, la dernière approche est basée sur les *figures scolaires* que nous avons définies au chapitre précédent (cinquième stratégie proposée). Il s'agit encore de recenser des objets vérifiant H et Pi mais, ici, les configurations sont obtenues à partir d'une *figure scolaire.* C'est-à-dire que, au lieu de parcourir la classe $H \cap Pi$, comme dans les stratégies ensemblistes 3 et 4, on cherche à construire un *élément générique* de cette classe. Suivant que l'on contrôle, tout au long de la résolution, que l'élément reste générique ou que l'on se contente d'un élément quelconque au départ, l'exhaustivité des cas est garantie ou non comme nous l'expliquerons en détaillant cette stratégie.

Nous détaillons ces stratégies ci-dessous. Nous avons fait le choix de présenter notre analyse par stratégie et non pas par question, ceci pour privilégier l'entière résolution du problème dans une approche particulière. Nous détaillons de nombreuses figures pour montrer les étapes décisives de chaque stratégie.
Nous considérons cette situation en géométrie plane, et nous intéresserons uniquement aux quadrilatères plans.

1.2. Conditions suffisantes, Stratégie 1

Dans cette approche par les conditions suffisantes, on teste une liste prédéterminée de conditions sur les diagonales pour savoir si elles sont suffisantes. C'est-à-dire qu'à partir de conditions déterminées à l'avance sur les diagonales : A_1, A_2, ...
On examine l'implication : H et Ai ⇒ Pj
Si cette implication est vraie, on a alors trouvé une condition suffisante.

La réponse donnée est correcte si l'on considère que la question ne porte que sur des conditions suffisantes, elle est incomplète et donc incorrecte si l'on considère que la question porte aussi sur des conditions nécessaires.

Pour étudier la vérité de l'implication, on peut utiliser différentes méthodes. On peut par exemple, à l'aide d'une figure ensembliste, trouver tous les objets vérifiant H et Ai et vérifier qu'ils appartiennent bien à l'ensemble *Pj*, on se place alors dans le cadre ensembliste. Cependant, nous faisons l'hypothèse que cette étude sera, le plus souvent, basée sur des objets et des théorème connus. C'est avec cette hypothèse que nous mènerons l'analyse, même si pour cela, nous devons parfois nous restreindre aux convexes. Nous n'excluons pas pour autant de cette stratégie d'autres procédés.

1.2.1. Question 1 (P1 : deux côtés parallèles)

Examinons les conditions :

A1 : *les diagonales se coupent en leur milieu*

A2 : *les diagonales sont de même longueur*

Les implications (H et Ai) ⇒ P1 sont-elles vraies ?

Si un quadrilatère a des diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme. Or un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles deux à deux. Il vérifie donc P1.

L'implication (H et A1) implique P1 est vraie. La condition A1, *les diagonales se coupent en leur milieu*, est suffisante pour P1 sous H.

Dans les quadrilatères convexes, si un quadrilatère a deux côtés opposés égaux et des diagonales de même longueur alors c'est un trapèze isocèle, le rectangle étant un cas particulier du trapèze isocèle. Le trapèze isocèle a bien deux côtés égaux et les deux autres parallèles, il vérifie donc P1. Dans les quadrilatères convexes vérifiant H, la condition A2, *les diagonales sont de même longueur*, est suffisante pour P1.

1.2.2. Question 2 (P2 : deux angles droits)

Examinons la condition :

A1 : *les diagonales se coupent en leur milieu*

Si un quadrilatère vérifie H et A1 alors c'est un parallélogramme et il ne vérifie pas forcément P2, *avoir deux angles droits*. A1 n'est pas une condition suffisante, sous H, pour P2.

En revanche, si on ajoute la condition :

A2 : *les diagonales sont de même longueur*

Si un quadrilatère vérifie A1 et A2 alors c'est un rectangle, il a donc deux angles droits. La condition *avoir des diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu* est donc une condition suffisante pour P2.

1.2.3. Question 3 (P3 : deux côtés égaux)

Examinons la condition :

A1 : *les diagonales se coupent en leur milieu*

Si un quadrilatère a des diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme. Ses côtés opposés sont donc égaux deux à deux et il vérifie P3. La condition *les diagonales se coupent en leur milieu* est une condition suffisante pour qu'un quadrilatère vérifie H et P3.

1.3. Configurations connues, Stratégie 2

Dans cette approche, on utilise des propriétés, définitions ou théorèmes *d'objets connus*. La classe des *objets connus* dépend évidemment de la personne qui résout l'exercice, cependant nous pouvons trouver quelques points communs pour des personnes ayant suivi l'enseignement mathématique français. Nous considérerons, par exemple, que les parallélogrammes, objet privilégié des classes de collège, sont des objets très connus. Nous faisons, en revanche, l'hypothèse que les quadrilatères croisés et concaves ne font pas partie des objets connus. Ils sont souvent considérés, dans l'enseignement, comme des *cas à part* voire *anormaux* ils sont alors exclus (explicitement ou non) ou évités. Leurs propriétés ne sont pas enseignées, ils sont tous considérés comme appartenant à un seul ensemble, aucun sous-ensemble des quadrilatères croisés n'est défini. C'est pourquoi, nous nous restreindrons aux quadrilatères convexes dans la suite de l'étude.

Les trapèzes sont peu institutionnalisés dans l'enseignement français, nous les considèrerons cependant connus même s'ils apparaissent moins « facilement » que les parallélogrammes.

Les rectangles, comme nous l'avons dit, sont rarement considérés comme appartenant à la classe des trapèzes isocèles, mais plutôt considérés comme des parallélogramme particuliers très connus. Ils peuvent donc apparaître sans que les trapèzes isocèles n'apparaissent, même si c'est toute la classe des trapèzes isocèles qui est concernée.

On recherche, ici, des configurations connues qui vérifient l'hypothèse H et la condition Pi, afin de déduire des conditions sur leurs diagonales. On est alors dans le schéma :

> H et Pi $\Leftarrow$ quadrilatère connu $\Rightarrow$ propriété connue sur les diagonales de ce quadrilatère

A moins que l'une des implications ne soit en fait une équivalence on ne peut déduire aucune implication entre les conditions trouvées et la propriété (H et Pi). En revanche, si la première implication est une équivalence :

> H et Pi $\Leftrightarrow$ quadrilatère connu $\Rightarrow$ propriété connue sur les diagonales de ce quadrilatère

on trouve alors des conditions nécessaires à Pi sous l'hypothèse H. Dans ce cas-là on peut chercher à donner la condition la plus *forte* sur les diagonales, c'est-à-dire à donner le plus grand nombre possible de conditions vérifiées par les diagonales des objets trouvés.

D'autre part, si la deuxième implication est une équivalence :

> H et Pi ⇐ quadrilatère connu ⇔ propriété connue sur les diagonales de ce quadrilatère

on trouve des conditions suffisantes à Pi sous l'hypothèse H.

La solution trouvée est fausse si on n'établit aucune équivalence.

Elle est correcte si l'ensemble des objets trouvés représente exactement l'ensemble défini par (H et Pi), c'est-à-dire s'il y a équivalence, et que l'on considère que la question porte sur les conditions suffisantes ou bien si l'ensemble des objets trouvés représente exactement l'ensemble défini par les propriétés sur les diagonales et que l'on considère que la question porte sur les conditions nécessaires.

Cette stratégie permet de trouver, de façon très économique, un ou même deux types d'objets qui conviennent. La stratégie est d'autant plus économique que les objets en jeu et les propriétés de leurs diagonales sont bien connus. Cependant, à moins d'avoir démontré une équivalence, elle ne permet pas de contrôler l'exhaustivité des résultats, on ne sait pas si on a trouvé l'ensemble de *tous les objets possibles*. Par suite, on ne contrôle pas le fait que les conditions trouvées sont bien nécessaires.

1.3.1. Question 1 (P1 : deux côtés parallèles)

Cherchons des objets connus vérifiant H, *deux côtés opposés égaux*, et la conclusion P1, *les deux autres côtés parallèles*.

Le parallélogramme convient, puisqu'il a des côtés opposés deux à deux parallèles et deux à deux égaux. D'autre part, une condition nécessaire et suffisante pour être un parallélogramme est que les diagonales se coupent en leur milieu. Cette équivalence est très connue depuis les classes de collège. Nous avons les implications :

> H et P1 ⇐ parallélogramme ⇔ diagonales se coupent en leur milieu

La condition, diagonales se coupent en leur milieu est une condition suffisante pour P1, il n'y a d'ailleurs pas besoin, ici de l'hypothèse H.

Le trapèze isocèle convient, puisque, par définition d'un trapèze il a deux côtés parallèles et que, par symétrie, il a les deux autres côtés de même longueur. Par symétrie, ses deux diagonales sont de même longueur. Nous avons les implications :

> H et P1 ⇐ trapèze isocèle ⇒ diagonales de même longueur

Nous ne pouvons déduire aucune condition nécessaire ou suffisante pour P1 de ces deux implications. Il faudrait maintenant démontrer au moins une équivalence en réduisant éventuellement la condition sur les diagonales. Pour cela, il faut changer de stratégie, celle-ci ne permettant pas de répondre.

1.3.2. Question 2 (P2 : deux angles droits)

Cherchons des objets connus vérifiant H, *deux côtés opposés égaux*, et la conclusion P2, *avoir deux angles droits*.

Le rectangle (et donc le carré) convient puisqu'il a des côtés opposés deux à deux égaux et quatre angles droits. Le rectangle est le seul quadrilatère convexe à vérifier H et P2. Ses diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur. On a donc les implications :

Dans les convexes,
H et P2 ⇔ rectangle ⇔ diagonales de même longueur qui se coupent en leur milieu

Dans les convexes, la condition *diagonales de même longueur qui se coupent en leur milieu*, est donc une condition nécessaire et suffisante pour Pi sous H.

1.3.3. Question 3 (P3 : deux côtés égaux)

Cherchons des objets connus vérifiant H, *deux côtés opposés égaux*, et la conclusion P3, *avoir les deux autres côtés égaux entre eux*.

Le parallélogramme (et donc le losange et le rectangle) convient puisqu'il a des côtés opposés deux à deux égaux. C'est le seul quadrilatère convexe à vérifier H et P3 et cette équivalence est un théorème très institutionnalisé dans les classes de collège. D'après l'équivalence sur les diagonales donnée à la première question, nous avons donc les implications :

Dans les convexes,
H et P3 ⇔ parallélogramme ⇔ diagonales qui se coupent en leur milieu

La condition *diagonales qui se coupent en leur milieu* est donc, dans les convexes, une condition nécessaire et suffisante à H et P3.

1.4. Cadre ensembliste, Stratégie 3 : **H puis Pi**

Nous allons montrer comment il est possible, en se plaçant dans le cadre ensembliste, de répondre aux trois questions.

Face à ce problème, on peut s'interroger d'abord sur les objets qui vérifient H et P1 (resp. H et P2 ; H et P3), pour ensuite regarder les propriétés sur leurs diagonales. On s'intéresse alors à l'implication : H et Pi ⇒ (Ai ?). On trouve ainsi une condition nécessaire à Pi sous H.

La question se pose alors de savoir si cette condition est suffisante, il faut pour cela tester les implications : H et Ai ⇒ Pi. Si la condition est aussi suffisante, la résolution est finie. Si la condition n'est pas suffisante, il s'agit alors de la renforcer pour qu'elle devienne suffisante sans la renforcer trop pour qu'elle reste nécessaire.

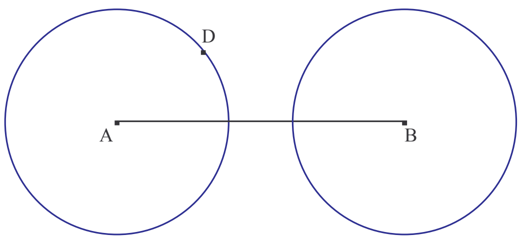
Ce contrôle de la condition nécessaire et suffisante se fait dans le cadre ensembliste grâce à une figure ensembliste.

Cette stratégie donne une condition nécessaire et suffisante à Pi sous l'hypothèse H, la solution trouvée est correcte.

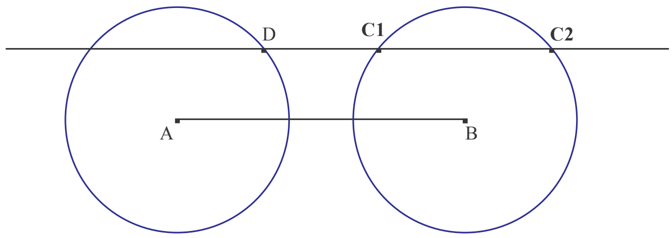
1.4.1. Question 1 (P1 : deux côtés parallèles)

1.4.1.a) Recherche des configurations : *H* puis *P1*

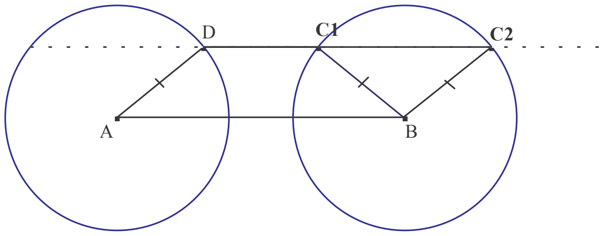
Une fois les points A et B placés dans le plan, l'hypothèse *H deux côtés opposés de même longueur* se traduit par AD = BC. C'est-à-dire que les points C et D appartiennent respectivement à deux cercles de même rayon, l'un centré en B, l'autre centré en A.



Une fois D fixé, pour traduire la propriété P1 *les deux autres côtés sont parallèles*, il faut tracer la droite parallèle à (AB) passant par D. C est alors point d'intersection de cette droite avec le cercle de centre B. Il y a ici deux points d'intersection C1 et C2.



On obtient les configurations : trapèze isocèle (ABC_1D) et parallélogramme (ABC_2D).

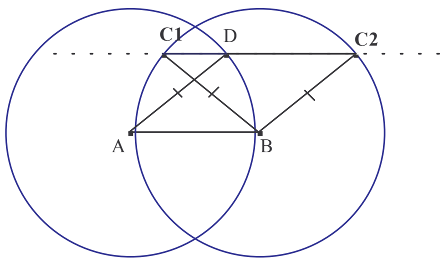


[ABC_1D : trapèze isocèle ; ABC_2D : parallélogramme]

Toutefois, se placer dans le cadre ensembliste pour résoudre cette question, signifie qu'on considère l'ensemble des objets qui vérifient H et P1, sans en oublier aucun. Pour atteindre tous ces objets, il convient de repérer tous les paramètres utilisés dans cette construction et de les faire varier.

A fixé, on peut faire varier la distance AB, le rayon des cercles et la position de D (liée à celle de C) sur son cercle.

Lorsque D parcourt le cercle ou lorsqu'on réduit le rayon des cercles, on reste bien en présence des deux configurations précédentes. En revanche, lorsque D se trouve entre C_1 et C_2, on se trouve en présence d'une autre configuration : un trapèze isocèle croisé (ABC_1D).



[ABC_1D trapèze isocèle croisé ; ABC_2D : parallélogramme]

On a donc l'équivalence :

$$\text{H et P1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{être un parallélogramme} \\ \text{ou} \\ \text{être un trapèze isocèle} \\ \text{ou} \\ \text{être un trapèze isocèle croisé} \end{cases}$$

Ce qui se formule en termes d'ensembles :

$$\mathrm{H} \cap \mathrm{P}_1 = \{\textit{Parallélogrammes}\} \cup \{\textit{Trapèzes isocèles}\} \cup \{\textit{Trapèzes isocèles croisés}\}$$

Il reste maintenant à trouver les conditions que vérifient leurs diagonales.

1.4.1.b) Les conditions sur les diagonales

Être un parallélogramme équivaut, pour un quadrilatère, à avoir *les diagonales qui se coupent en leur milieu*.

Les trapèzes isocèles et les trapèzes isocèles croisés ont des *diagonales de même longueur*.

En effet, le trapèze isocèle, pour des raison de symétrie, a forcément des diagonales de même longueur. La réciproque est d'ailleurs vraie dans l'ensemble des trapèzes, un trapèze ayant des diagonales de même longueur est forcément un trapèze isocèle.

Et d'autre part, si ABCD est un trapèze isocèle croisé, le quadrilatère ABDC est convexe. ABDC est un trapèze (grâce à P1) dont les diagonales sont égales (grâce à H), c'est donc un trapèze isocèle, et ses côtés [AC] et [BD] ont de ce fait même longueur. Par suite, le quadrilatère croisé ABCD a des diagonales de même longueur.

Nous avons ainsi l'implication :

$$\text{H et P1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{être un parallélogramme} \\ \text{ou} \\ \text{être un trapèze isocèle} \\ \text{ou} \\ \text{être un trapèze isocèle croisé} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{diag. se coupent en leur milieu} \\ \text{ou} \\ \text{diag. de même longueur} \end{cases}$$

C'est à dire que nous avons trouvé une condition nécessaire pour avoir (H et P1) et que nous avons résolu un sens de l'implication de la question de départ. Il nous faut maintenant étudier l'autre sens et pour cela examiner si cette condition est aussi une condition suffisante.

1.4.1.c) Interprétation logique

Appelons les propriétés :

A1 : *avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu*

A2 : *avoir des diagonales de même longueur*

Rappelons :

H : *avoir deux côtés opposés de même longueur*

P1 : *Avoir les deux autres côtés parallèles*

Nous venons de démontrer :

Sous l'hypothèse H, P1 $\Rightarrow$ (A1 ou A2) (1)

C'est-à-dire :

Sous l'hypothèse H, (P1 $\Rightarrow$ A1) **ou** (P1 $\Rightarrow$ A2) (1')

Comme nous cherchons à démontrer une équivalence, nous voulons maintenant essayer de démontrer la réciproque, c'est-à-dire :

Sous l'hypothèse H, (A1 ou A2) $\Rightarrow$ P1 (2)

Ce qui peut se traduire par :

Sous l'hypothèse H, (A1 $\Rightarrow$ P1) **et** (A2 $\Rightarrow$ P1) (2')

Les égalités respectives entre (1) et (1') et (2) et (2') se démontrent facilement à l'aide des tables de vérité ou en utilisant les propriétés de distributivité et associativité des connecteurs logiques **et** et **ou** ainsi que les propriétés de De Morgan.

1.4.1.d) Cette condition est-elle une condition suffisante ?

La propriété *avoir ses diagonales qui se coupent en leur milieu* (A1) est bien une condition suffisante puisqu'il y a équivalence avec la propriété *être un parallélogramme*. En effet, on a :

diag. se coupent en leur milieu $\Leftrightarrow$ *être un parallélogramme* $\Rightarrow$ P1

Nous venons donc de démontrer que :

A1 $\Rightarrow$ P1

et donc à fortiori que :

Sous l'hypothèse H, A1 $\Rightarrow$ P1

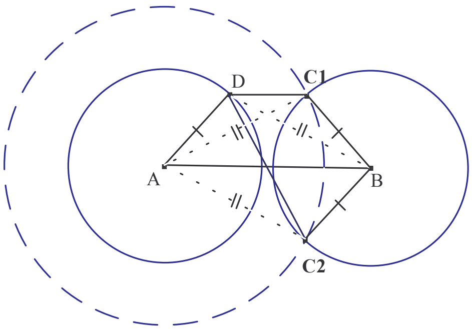
Reste à examiner si la propriété *avoir ses diagonales de même longueur* (A2) est une condition suffisante, c'est-à-dire si l'implication suivante dans les quadrilatères est vraie :

Sous l'hypothèse H, A2 $\Rightarrow$ P1

Ou encore :

H et A2 $\Rightarrow$ P1

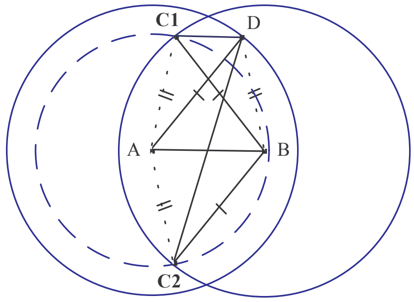
Pour cela, reprenons le point de vue ensembliste et intéressons-nous aux quadrilatères qui vérifient (H) et (A2). Comme dans la précédente construction, pour vérifier H, C et D se trouvent sur deux cercles de même rayon ayant respectivement pour centre B et A. D étant fixé, pour vérifier A2, C doit se trouver sur le cercle de centre A et de rayon BD. Il y a deux positions possibles (éventuellement confondues) pour le point C, les deux intersections C1 et C2 des cercles.



[ABC_1D : trapèze isocèle ; ABC_2D parallélogramme croisé]

On obtient deux configurations : *trapèze isocèle* (ABC_1D) et un quadrilatère croisé associé au parallélogramme que nous appellerons *parallélogramme croisé* (ABC_2D).

Lorsque D décrit le cercle, ABCD est l'une de ces deux configurations, mais lorsqu'on réduit la distance AB, le trapèze isocèle devient croisé.



[ABC_1D : trapèze isocèle croisé ; ABC_2D parallélogramme croisé]

Or, le parallélogramme croisé ne convient pas, il a bien deux côtés égaux mais les deux autres se croisent et ne sont donc pas parallèles. Nous avons là un contre-exemple qui montre que la condition A2, *avoir des diagonales égales*, n'est pas suffisante pour P1 sous H.

1.4.1.e) Recherche d'une CNS, élimination des contre-exemples

Puisque A2 n'est pas suffisante, nous allons la restreindre à une condition *plus forte*. Nous allons chercher une nouvelle condition A2i qui soit non seulement suffisante mais qui permette en plus d'avoir une équivalence finale. Nous cherchons donc une condition A2i telle que :

Sous H, A2i $\Rightarrow$ P1

Et

Sous H, P1 $\Rightarrow$ A1 ou A2i

Nous venons de démontrer l'implication :

H et A2 $\Rightarrow$ (P1 **ou** *parallélogramme croisé*)

(H et A2) n'est pas une condition suffisante pour P1 mais il suffit d'éliminer le cas du parallélogramme croisé pour avoir une condition suffisante.

Or les diagonales de ce parallélogramme croisé sont parallèles, il suffit donc d'interdire le cas des diagonales parallèles pour éliminer ce type. Ainsi une condition suffisante peut s'écrire :

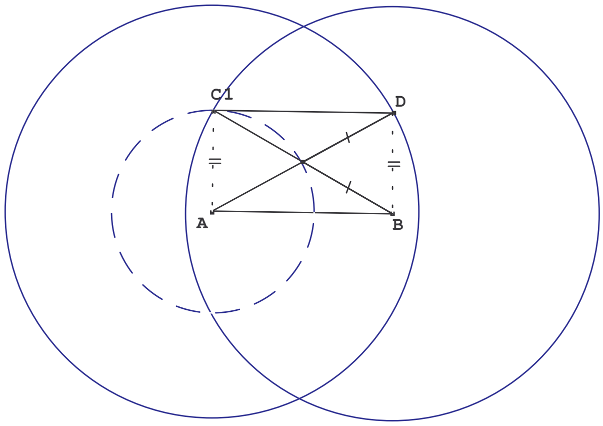
Conjecture 1
A2b : *avoir des diagonales égales et non parallèles*

Cependant, il convient d'être vigilant. Nous cherchons à trouver, à la fin, une équivalence or, en interdisant les diagonales parallèles, nous pouvons avoir éliminé des configurations qui vérifient H et P1.

Pour exercer un contrôle sur les cas que nous voulons éliminer et ne pas en éliminer trop, replaçons nous sous le point de vue ensembliste.

Nous voulons éliminer le parallélogramme croisé représenté sur la figure ci-dessus mais comment définir cette classe d'objets ? Si nous demandons des diagonales non parallèles nous éliminons toute la classe des parallélogrammes croisés.

Or si, dans le dessin précédent, nous faisons bouger D par exemple, ABC_1D devient un parallélogramme croisé associé au rectangle que nous appellerons *rectangle croisé* (de type RC1).



[ABC_1D : rectangle croisé RC1]

L'ensemble des rectangles étant l'intersection de l'ensemble des trapèzes isocèles avec l'ensemble des parallélogrammes, dans ce cas ABC_1D est à la fois un parallélogramme croisé et un trapèze isocèle croisé. On a donc {*rectangle croisés*} = {*trapèzes isocèles croisés*} ∩ {*parallélogrammes croisés*}.

Le rectangle croisé de type RC1 ABC_1D vérifie bien H ($AD = BC_1$) et P1 ($AB // C_1D$), il ne faut donc pas l'éliminer. Cependant il ne peut pas être atteint, ni avec la condition A2b *avoir des diagonales égales et non parallèles* ni avec la condition A1 *avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu.*

Il faut donc que nous éliminions la classe des parallélogrammes croisés sans toutefois éliminer toute la classe des rectangles croisés.

Nous venons de démontrer :

H et A2b ⇒ [P1 et (Non rectangles croisés RC1)]

Ou en termes d'ensembles :

$H \cap A2b \subset P1 - \{\textit{rectangles croisés RC1}\}$

où $P1$ - {*rectangles croisés RC1*}est le complémentaire de la classe des rectangles croisés du type RC1 dans l'ensemble *P1*.

La condition A2b est bien une condition suffisante pour P1 sous H puisque l'ensemble H ∩ A2b est strictement inclus dans *P1*. Cependant, nous cherchons une condition finale nécessaire et suffisante et (A1 ou A2b) n'en est pas une pour P1 sous H. (H et P1) n'implique pas (A1 ou A2b), le rectangle croisé RC1 est un contre-exemple.

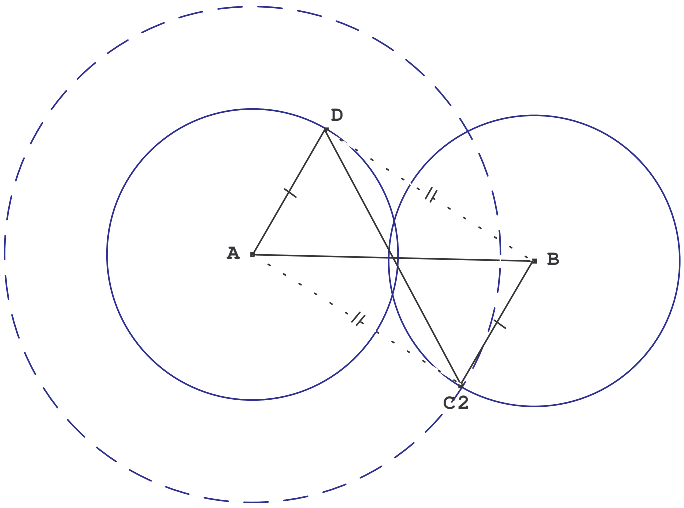
Nous avons trop restreint la condition A2. Essayons maintenant d'élargir A2b pour atteindre le précédent exemple rectangle croisé RC1 tout en continuant à éliminer les autres parallélogrammes croisés. Nous pouvons par exemple, prendre la condition suivante :

Conjecture 2
A2c : *avoir des diagonales égales et symétriques l'une de l'autre par rapport à une droite*

Cette condition permet bien de rejeter le parallélogramme croisé non rectangle, dont les diagonales ne sont pas symétriques, et d'atteindre le rectangle croisé RC1.

Cependant, soyons encore vigilants, nous voulons autoriser le rectangle croisé (RC1) *qui est représenté ci-dessus* mais nous autorisons en fait, avec cette condition, tous les rectangles croisés. Contrôlons que cette classe tout entière ne contient pas d'éléments ne vérifiant pas (H et P1).

Si nous reprenons le dernier dessin avec le point C_2 et que nous faisons varier D et la longueur AD, nous retrouvons encore un rectangle croisé.



[ABC$_1$D : rectangle croisé RC2]

Et ce quadrilatère vérifie H mais pas P1. Ici, les côtés égaux considérés (H) sont les côtés parallèles et les deux autres côtés se croisent donc.

Cette condition A2c autorise la présence du rectangle croisé RC2 ci-dessus qui ne vérifie pourtant pas P1 et qu'il faudrait éliminer.

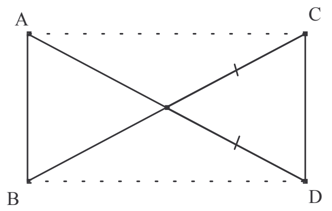
Nous venons de démontrer :

H et A2c $\Rightarrow$ (P1 **ou** rectangle croisé RC2)

A2c n'est pas une condition suffisante à P1 sous H, il faut donc restreindre la condition A2c pour éliminer ce dernier cas et obtenir une condition suffisante.

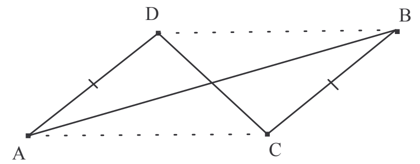
Pour résumer, les derniers paragraphes, la classe d'objets équivalente à $H \cap P1$ doit contenir (ce n'est pas exclusif) :

- *Les rectangles croisés RC1 dont les côtés qui satisfont H sont les côtés qui se coupent (RC1) :*

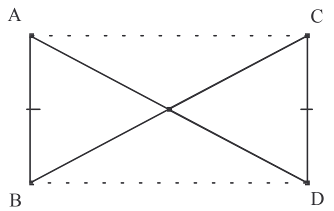


En revanche, elle ne doit pas contenir :

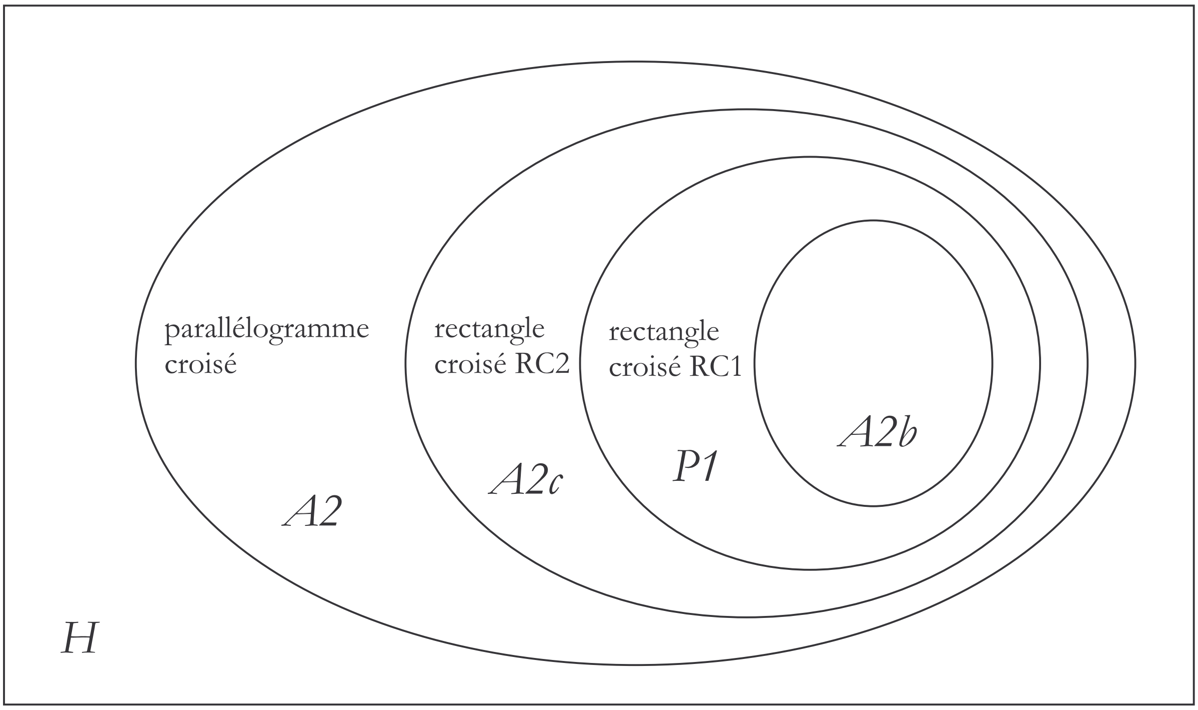
- *Les parallélogrammes croisés autres que des rectangles croisés RC1 :*



- *Les rectangles croisés dont les côtés qui satisfont H sont les côtés parallèles (RC2) :*



Ceci peut se représenter avec les ensembles :



Pour éliminer ce dernier cas, rectangle croisé RC2, nous proposons la condition suivante qui découle des précédentes :

Conjecture 3
A2d : *Avoir des diagonales égales si les côtés opposés vérifiant H sont non parallèles*

En faisant varier tous les paramètres des *figures ensemblistes* représentées par les quadrilatères ABC_1D et ABC_2D, on contrôle le fait que cette dernière condition est bien une condition suffisante, sous H, pour P1 et que (A1 ou A2d) est bien une condition nécessaire, sous H, pour P1. En fait, on contrôle le fait que A2d est une condition *nécessaire et suffisante* pour *être un trapèze isocèle croisé ou non croisé.*

1.4.1.f) Énoncé d'une condition nécessaire et suffisante

En conclusion, les implications suivantes sont vraies :

Sous H, P1 $\Rightarrow$ (A1 ou A2d)

Et

Sous H, A2d $\Rightarrow$ P1

Et

Sous H, A1 $\Rightarrow$ P1

Ce qui peut aussi s'écrire :

Sous H, (A1 ou A2d) $\Leftrightarrow$ P1

Nous avons donc une équivalence :

Dans l'ensemble des quadrilatères ayant deux côtés opposés égaux,

Avoir les deux autres côtés parallèles (P1)	$\Leftrightarrow$	Avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu (A1) **OU** Avoir des diagonales égales **et** les côtés opposés égaux non parallèles (A2d)

Ce résultat découle d'une méthode basée sur le point de vue ensembliste : on cherche une solution comme intersection de deux classes d'objets, la classe des objets qui vérifient H et la classe des objets qui vérifient P1. Elle nécessite une visualisation « dynamique » : les points peuvent bouger sous certaines contraintes. Elle permet d'atteindre toutes les configurations, que ce soit des quadrilatères croisés ou non.

1.4.1.g) Affaiblir la condition nécessaire et suffisante

A la suite du problème précédent, bien que ce ne soit pas demandé par la question, on peut essayer d'affaiblir la condition A1 (*les diagonales se coupent en leur milieu*). En effet, l'implication *A1 implique P1* est vraie même en dehors de l'ensemble *H*. Il est donc naturel de se demander si on ne peut pas affaiblir A1 en A1b et garder l'implication *A1b implique P1* vraie dans *H*.

Affaiblir la condition A1 signifie ici passer de la condition A1 à la condition A1b telle que :

$H \cap A1 = H \cap A1b$

Il ne faut pas réduire A1 à l'intérieur de H, il faut que ce soit équivalent sur H, c'est donc en dehors de H qu'il faut agrandir l'ensemble A1.

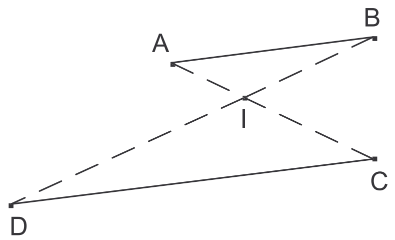
Nous pourrions prendre A1b = (A1 ou Non H) mais cela n'a aucun intérêt, il ne faut pas que A1b s'écrive en fonction de H.

Nous pouvons affaiblir la propriété en prenant :

A1b : *les diagonales se coupent dans un rapport de proportionnalité*

par quoi nous voulons signifier que si les diagonales AC et BD se coupent en I, on a la relation suivante :

AI / AC = BI / BC

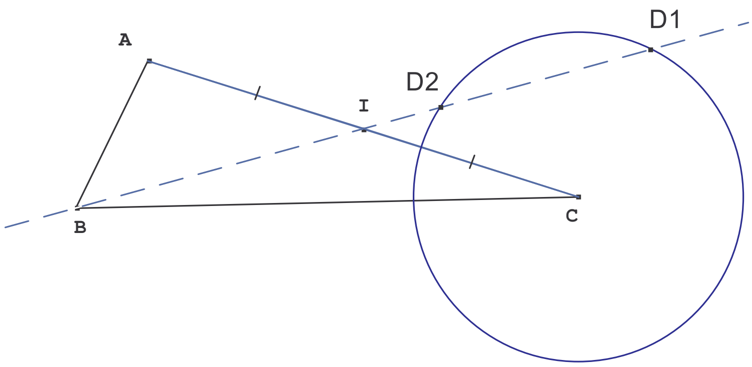


Mais, d'après le théorème de Thalès, A1b implique P1 même hors de *H*. Ici encore, cette condition est trop forte.

Nous pouvons aussi tester la condition :

A1c : *une diagonale coupe l'autre en son milieu*

On obtient alors deux configurations. Quelle que soit la diagonale choisie, on a deux points D possibles dont l'un ne convient pas.



A1c n'est plus une condition suffisante, pour la rendre suffisante, il faudrait éliminer une configuration et cette discrimination n'est pas facile.

Cette question de l'affaiblissement des conditions suffisantes est naturelle. On cherche le plus grand ensemble dont l'intersection avec *H* est *P1*. En mathématiques, il est habituel de donner l'hypothèse la plus faible possible, le théorème ainsi énoncé étant plus puissant.

Cependant, non seulement il faut que l'énoncé de la condition affaiblie ait de l'intérêt c'est-à-dire qu'il ne soit pas de la forme (A1 ou Non H) par exemple, mais il faut aussi qu'il soit suffisamment clair et facile à appréhender. Une condition trop compliquée perd son intérêt en perdant de son sens.

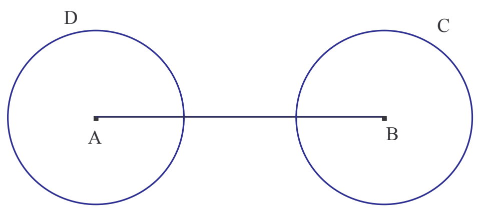
Il faut donc trouver un juste milieu entre l'utilité d'affaiblir une condition et l'utilité de garder un sens et un intérêt à cette condition. C'est pourquoi, nous resterons finalement sur la première équivalence énoncée avec la condition A1.

1.4.2. Question 2 (P2 : deux angles droits)

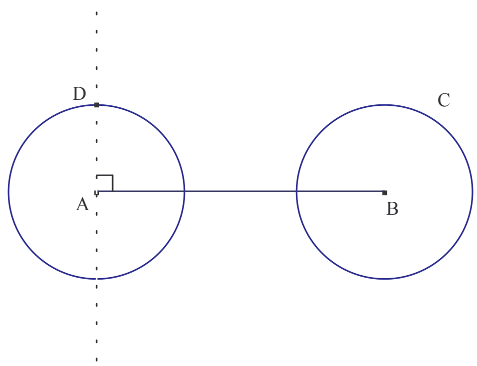
1.4.2.a) Recherche des configurations : *H* puis *P2*

Nous cherchons pour cette question les quadrilatères vérifiant les conditions H *deux côtés opposés de même longueur* et P2 *deux angles droits.*

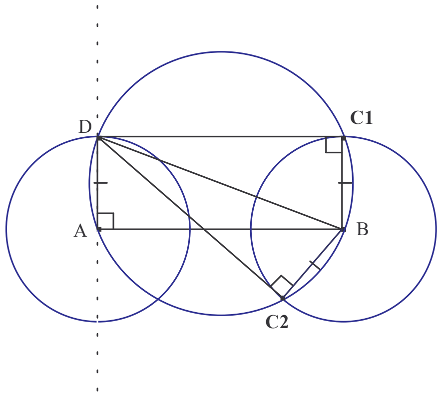
Comme pour la première question, C et D se trouvent sur deux cercles de même rayon et de centre respectif B et A.



Dans un premier temps, on suppose que les deux angles droits sont *opposés* en A et en C. On trace donc la perpendiculaire à (AB) passant par A, le point D est le point d'intersection de cette perpendiculaire et du cercle de centre A.



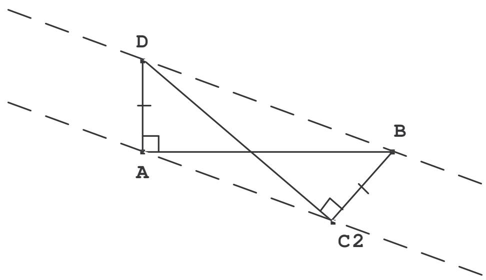
Le triangle BDC est rectangle en C, C doit donc se trouver sur le cercle de diamètre DB passant par D et par B. Il y a deux positions possibles pour C, les deux points d'intersection des deux cercles C1 et C2.



[ABC_1D : rectangle ; ABC_2D papillon rectangle]

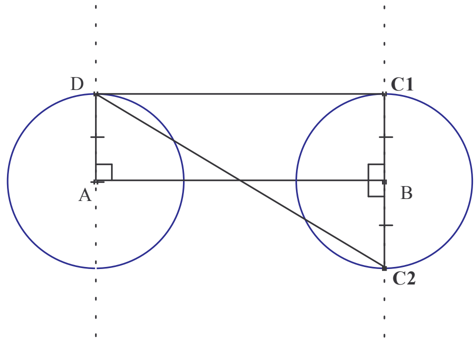
On obtient alors deux configurations : **rectangle** (ABC_1D) et quadrilatère **croisé** (ABC_2D).

Les triangles ADB et C_2BD sont égaux par construction. Il en résulte que la droite (AC_2) est parallèle à la droite (DB) et que le quadrilatère admet un axe de symétrie. Par suite, le croisé ci-dessus est un croisé *papillon* associé au trapèze isocèle dont les diagonales sont perpendiculaires aux côtés qui ne forment pas les bases. Nous l'appellerons croisé *papillon rectangle*.



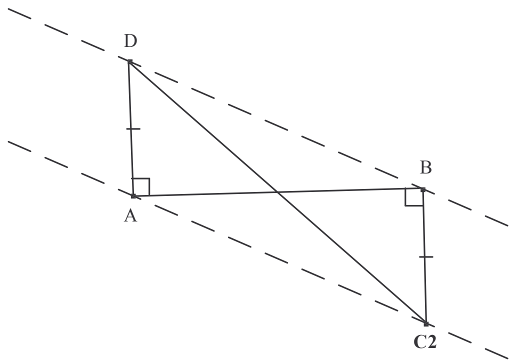
Lorsque l'on fait varier la distance AB ou le rayon des cercles de centre A et B, on reste en présence de ces deux configurations.

Dans un second temps, on suppose que les deux angles droits sont *consécutifs* en A et en B. On trace donc les deux perpendiculaires à la droite (AB) passant respectivement par le point A et le point B. D (resp. C) est à l'intersection du cercle de centre A (resp. B) et de la perpendiculaire passant par A (resp. B). Une fois D fixé, il y a deux positions possibles pour le point C, C_1 et C_2.



[ABC_1D : rectangle ; ABC_2D parallélogramme croisé rectangle]

On obtient deux configurations : un **rectangle** (ABC_1D) et un quadrilatère **croisé** (ABC_2D). Les triangles ABC et BAD sont égaux et ce quadrilatère croisé est associé au parallélogramme dont une des diagonales est perpendiculaire aux côtés opposés égaux. Nous l'appellerons *parallélogramme croisé rectangle* (à ne pas confondre avec le *rectangle croisé* !).



Lorsque l'on fait varier la distance AB ou le rayon des cercles de centre A et B, on reste en présence de ces deux configurations.

1.4.2.b) Les conditions sur les diagonales

Être un rectangle équivaut, pour un quadrilatère, à avoir *des diagonales de même longueur qui se coupent en leur milieu*.

Les quadrilatères croisés *papillon rectangle* et *parallélogramme croisé rectangle* ont des diagonales parallèles puisqu'ils sont des quadrilatères croisés associés respectivement au trapèze isocèle et au parallélogramme.

Nous avons ainsi l'implication :

$$\text{H et P2} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l}\text{être un rectangle}\\ \text{ou}\\ \text{être un papillon rectangle}\\ \text{ou}\\ \text{être un plg croisé rectangle}\end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l}\text{diag. égales qui se coupent en leur milieu}\\ \text{ou}\\ \text{diag. parallèles}\end{array}\right.$$

Nous avons trouvé une *condition nécessaire* pour avoir (H et P2), il nous faut maintenant examiner si cette condition est aussi une condition suffisante.

1.4.2.c) Interprétation logique

Appelons les propriétés :

A1 : *avoir des diagonales égales qui se coupent en leur milieu*

A2 : *avoir des diagonales parallèles*

Rappelons :

H : *avoir deux côtés opposés de même longueur*

P2 : *Avoir deux angles droits*

Nous venons de démontrer :

Sous l'hypothèse H, P2 ⇒ (A1 ou A2)

Intéressons-nous à la réciproque, c'est-à-dire à :

Sous l'hypothèse H, (A1 ⇒ P2) **et** (A2 ⇒ P2)

1.4.2.d) Cette condition est-elle une condition suffisante ?

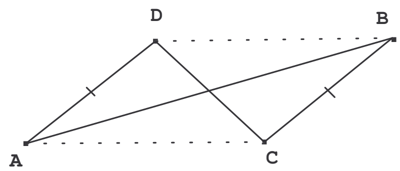
La propriété *avoir des diagonales de même longueur qui se coupent en leur milieu* (A1) est bien une condition suffisante, en effet, on a :

diagonales égales et qui se coupent en leur milieu ⇔ *être un rectangle* ⇒ P2

Donc, sous l'hypothèse H, A1 ⇒ P2.

Reste à examiner si la propriété *avoir ses diagonales parallèles* (A2) est une condition suffisante.

Nous pouvons tout de suite répondre non, car nous avons rencontré lors de la résolution de la question précédente, un contre-exemple :



Ce parallélogramme croisé vérifie bien H *deux côtés opposés de même longueur* et A2 *diagonales parallèles* mais ne vérifie pas P2 puisqu'il n'a aucun angle droit.

En conséquence la condition A2 n'est pas suffisante pour P2 sous H.

1.4.2.e) Recherche d'une CNS, élimination des contre-exemples

Comme dans la question précédente, nous cherchons une condition A2i suffisante et telle que (A1 ou A2i) soit nécessaire, c'est-à-dire telle que :

Sous H, A2i $\Rightarrow$ P2 Et Sous H, P2 $\Rightarrow$ (A1 ou A2i)

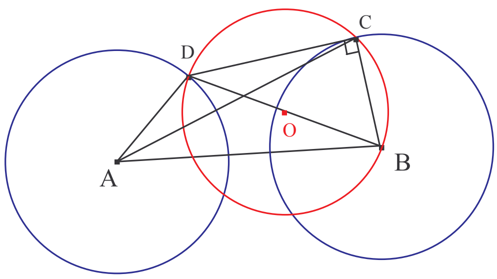
Examinons la condition :

Conjecture 1
A2b : *les extrémités d'une diagonale sont sur le cercle ayant pour diamètre l'autre diagonale*

Cette condition est vérifiée par le *papillon rectangle*, mais le *parallélogramme croisé rectangle* ne la vérifie pas, or il ne vérifie pas non plus A1. Nous avons donc trop restreint notre condition et il faut la rendre plus *faible* pour avoir une condition (A1 ou A2i) qui soit nécessaire. Élargissons notre précédente condition à :

Conjecture 2
A2c : *<u>une</u> extrémité d'une diagonale est sur le cercle ayant pour diamètre l'autre diagonale*

Toutefois, cette condition A2c n'est alors plus suffisante, comme l'illustre le contre-exemple ci-dessous qui vérifie H et A2c et qui n'a pas deux angles droits.

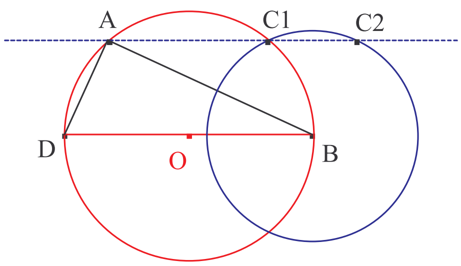


Il faut donc restreindre cette condition pour avoir une condition suffisante à P2.

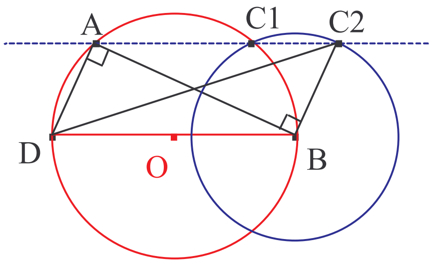
Conjecture 3
A2d : *les diagonales sont parallèles et telles qu'une extrémité d'une diagonale est sur le cercle ayant pour diamètre l'autre diagonale*

Les configurations croisées vérifiant H et P2, *papillon rectangle* et *parallélogramme croisé rectangle*, vérifient aussi A2d. La condition (A1 ou A2d) est donc une condition nécessaire à P2, puisque le rectangle vérifie A1. Vérifions que c'est aussi une condition suffisante, en cherchant les configurations qui vérifient H et A2d.

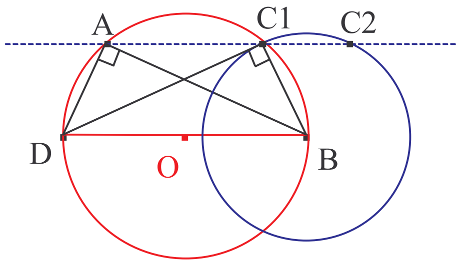
Pour vérifier H, on doit avoir AD = BC ; pour vérifier A2d, on doit avoir (BD) // (AC) et A sur le cercle de diamètre [BD]. Pour faciliter la construction de la figure on trace d'abord le segment [BD]. Il y a deux points d'intersection C_1 et C_2 de la droite parallèle à (BD) passant par A et du cercle de centre B et de rayon AD.



On trouve deux configurations, celle du *papillon rectangle* ou celle du *parallélogramme croisé rectangle*, selon que le point C appartient ou non au cercle de diamètre [BD]. Les configurations ne changent pas lorsqu'on déplace les points.



[Parallélogramme croisé rectangle]



[Papillon rectangle]

La condition A2d convient donc.

1.4.2.f) Énoncé d'une condition nécessaire et suffisante

En conclusion, sous H, les implications suivantes sont vraies :

P2 $\Rightarrow$ (A1 ou A2d) et A2d $\Rightarrow$ P2 et A1 $\Rightarrow$ P1

Ce qui peut aussi s'écrire : Sous H, (A1 ou A2d) $\Leftrightarrow$ P1

Nous avons donc l'équivalence :

dans l'ensemble des quadrilatères ayant deux côtés opposés égaux (*H*),

Avoir deux angles droits (P2)	⇔	Avoir des diagonales égales qui se coupent en leur milieu (A1) **OU** Avoir des diagonales parallèles et telles qu'une extrémité d'une diagonale est sur le cercle ayant pour diamètre l'autre diagonale (A2d)

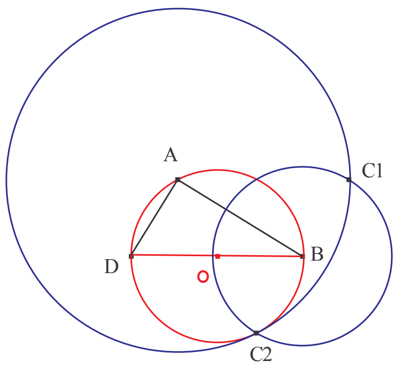
1.4.2.g) Affaiblir la condition nécessaire et suffisante

La condition A1 équivaut à la condition *être un rectangle*, même sans la condition H. C'est pourquoi nous cherchons à l'affaiblir. Examinons la condition :

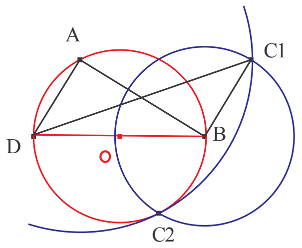
> A1b : *avoir des diagonales de même longueur et telles qu'une extrémité d'une diagonale est sur le cercle ayant pour diamètre l'autre diagonale.*

Le rectangle vérifie cette condition. Vérifions que cette condition est suffisante, sous H, pour P2. Construisons pour cela un quadrilatère vérifiant H et A1b.

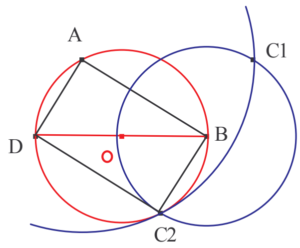
Pour vérifier H, on doit avoir AD = BC ; pour vérifier A1b, on doit avoir BD = AC et A sur le cercle de diamètre [BD]. Il y a deux points d'intersection C_1 et C_2 du cercle de centre A et de rayon BD et du cercle de centre B et de rayon AD.



On trouve deux configurations, le *parallélogramme croisé rectangle* ou le *rectangle*, lorsque le point C appartient aussi au cercle de diamètre [BD]. On reste en présence de ces configurations lorsque l'on déplace les points.



[Parallélogramme croisé rectangle]



[Rectangle]

On a donc les équivalences :

Sous H, (A1b ou A2d) ⇔ (*rectangle* ou *papillon rectangle* ou *parallélogramme croisé rectangle*) ⇔ P2

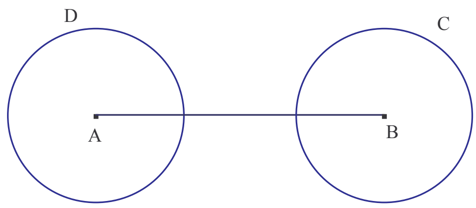
En conclusion, une condition nécessaire et suffisante pour un quadrilatère ayant deux côtés opposés égaux (H) d'avoir deux angles droits (P2) est d'avoir des diagonales, égales ou parallèles, telles que l'une des extrémités d'une des diagonales se trouve sur le cercle de diamètre l'autre diagonale (A1b ou A2d).

1.4.3. Question 3 (P3 : deux côtés égaux)

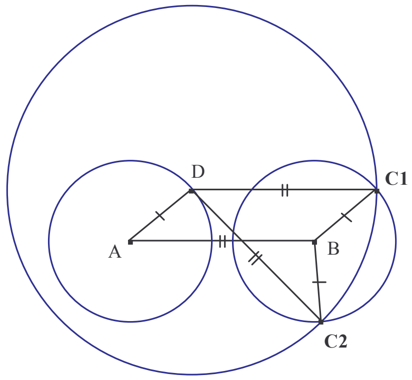
1.4.3.a) Recherche des configurations : *H* puis *P3*

Nous cherchons pour cette question les quadrilatères vérifiant les conditions H *deux côtés opposés de même longueur* et P3 *deux autres côtés de même longueur entre eux.*

Comme pour les questions précédentes, C et D se trouvent sur deux cercles de même rayon et de centre respectif B et A.



Pour satisfaire P3 *avoir les deux autres côtés égaux*, le quadrilatère doit vérifier DC = AB. Une fois la distance AB et la position de D fixées, il y a deux positions possibles pour le point C, les deux points d'intersection du cercle de centre B avec le cercle de centre D et de rayon AB, C_1 et C_2.



[ABC_1D : parallélogramme ; ABC_2D croisé papillon]

On obtient deux configurations : un parallélogramme (ABC_1D) et un quadrilatère croisé associé au trapèze isocèle, que nous avons appelé *papillon* (ABC_2D). En effet, les triangles ABC_2 et C_2DA sont égaux et AC_2BD est un trapèze isocèle.

Si l'on fait varier la position de D sur le cercle ou la distance AB, on ne change pas les configurations obtenues.

1.4.3.b) Les conditions sur les diagonales

Nous avons déjà vu les conditions suivantes :

Être un parallélogramme équivaut, pour un quadrilatère, à avoir *des diagonales qui se coupent en leur milieu*.

Les quadrilatères croisés *papillon* ont des *diagonales parallèles*.

Nous avons ainsi l'implication :

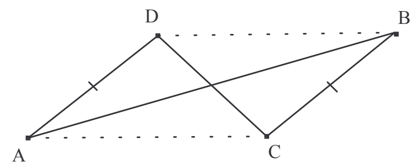
$$\text{H et P3} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{être un parallélogramme}\\ \text{ou}\\ \text{être un croisé papillon}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{diag. se coupent en leur milieu}\\ \text{ou}\\ \text{diag. parallèles}\end{array}\right.$$

Nous avons trouvé une *condition nécessaire* pour avoir (H et P3).

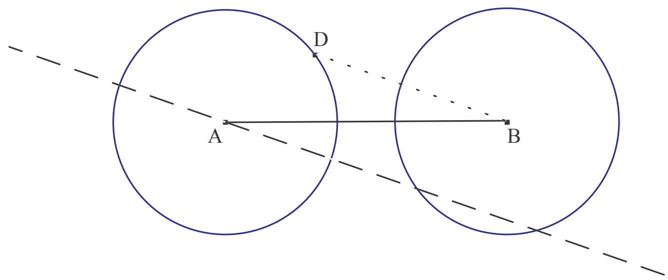
Soit A1 : *avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu*

Soit A2 : *avoir des diagonales parallèles*

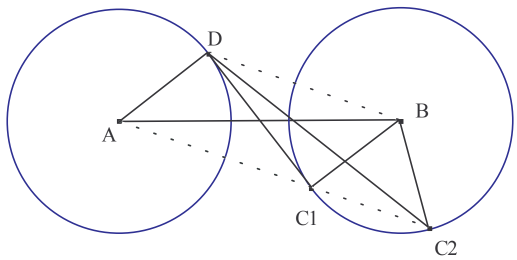
La condition A2, *diagonales parallèles*, n'est pas une condition suffisante, sous H, pour P3. En effet, nous avons vu, par exemple, que le parallélogramme croisé (qui n'est pas un rectangle croisé) est un contre-exemple, il vérifie H, *deux côtés opposés de même longueur*, et A2 mais il ne vérifie pas P3, *les deux autres côtés sont égaux entre eux*.



Étudions les quadrilatères vérifiant H, *deux côtés opposés de même longueur*, et A2, *diagonales parallèles*. D et C se trouvent sur deux cercles de même rayon et de centre respectif A et B. Une fois D fixé, C appartient à la parallèle à (DB) passant par A, il y a deux points d'intersection.



On obtient ainsi deux configurations : parallélogramme croisé (ABC_1D) et croisé papillon (ABC_2D).



[ABC_1D : parallélogramme croisé; ABC_2D : croisé papillon]

Les configurations restent les mêmes lorsque D décrit le cercle et lorsqu'on fait varier la distance AB.

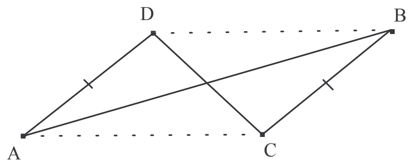
- **Autre méthode**

Pour trouver ces configurations, nous aurions aussi pu utiliser le résultat de la question 1 en « intervertissant » les diagonales et les côtés parallèles. En effet, la question 1 donnait :

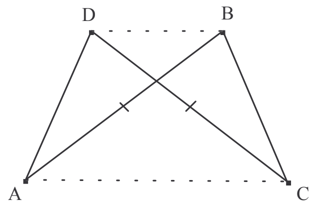
$$\text{H et deux autres côtés parallèles} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{être un parallélogramme} \\ \text{ou} \\ \text{être un trapèze isocèle} \\ \text{ou} \\ \text{être un trapèze isocèle croisé} \end{cases}$$

Alors pour trouver les configurations vérifiant H et *les diagonales parallèles*, il faut et il suffit d'intervertir les diagonales avec les côtés parallèles des configurations trouvées à la question 1.

Il y a encore deux quadrilatères croisés associés aux quatre points représentant le parallélogramme. C'est, en fait, le même parallélogramme croisé grâce au rôle identique que jouent les deux paires de côtés du parallélogramme (les deux paires sont parallèles et de même longueur) :



Il y a encore un quadrilatère croisé associé aux quatre points représentant le trapèze isocèle et le trapèze isocèle croisé : le croisé papillon.



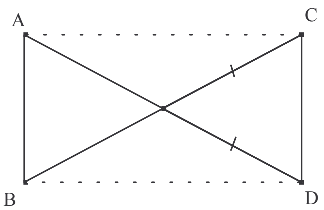
1.4.3.c) Recherche d'une CNS, élimination du contre-exemple

Nous venons de démontrer l'implication :

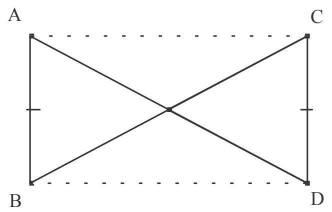
H et A2 $\Rightarrow$ (parallélogramme croisé **ou** croisé papillon)

Pour avoir une condition suffisante, il nous faut donc éliminer le cas du parallélogramme croisé sans toutefois éliminer les rectangles croisés qui sont à l'intersection des croisés associés au parallélogrammes et des croisés associés au trapèze :

- Les rectangles croisés dont les côtés qui satisfont H sont les côtés qui se coupent (RC1) :



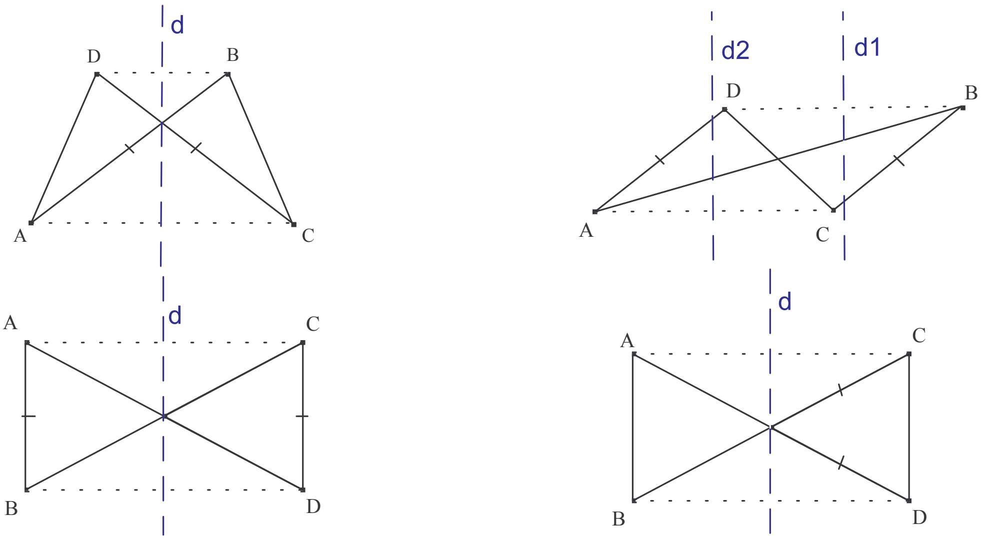
- Les rectangles croisés dont les côtés qui satisfont H sont les côtés parallèles (RC2) :



Testons la condition suivante :

Conjecture 1
A2b : *avoir des diagonales parallèles et telles qu'elles admettent un même axe de symétrie qui leur est perpendiculaire.*

Cette condition est bien vérifiée par les croisés papillons mais pas par les parallélogrammes croisés autres que des rectangles croisés.



A2 b est donc bien une *condition suffisante* pour P3 sous H. De plus, elle ne discrimine pas d'autre configuration que le parallélogramme croisé autre que le rectangle croisé, elle vérifie donc :

Croisé papillon $\Rightarrow$ A2b

Et par suite :

H et P3 $\Rightarrow$ A1 ou A2b

1.4.3.d) Énoncé d'une condition nécessaire et suffisante

En conclusion, les implications suivantes sont vraies :

Sous H, P3 $\Rightarrow$ (A1 ou A2b)

Et

Sous H, A2b ⇒ P3

Et

Sous H, A1 ⇒ P3

Ce qui peut aussi s'écrire :

Sous H, (A1 ou A2b) ⇔ P3

Nous avons donc une équivalence :

Dans l'ensemble des quadrilatères ayant deux côtés opposés égaux (*H*),

Avoir les deux autres côtés de même longueur (P3)	⇔	Avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu (A1) **OU** Avoir des diagonales parallèles et telles qu'elles admettent un même axe de symétrie qui leur est perpendiculaire (A2b)

1.5. Cadre ensembliste, Stratégie 4 : **P1 puis H**

Cette stratégie débute, de la même façon, par le recensement des objets vérifiant H et Pi, mais ici on se place d'abord dans *Pi* avant de rajouter l'hypothèse H. L'avantage est que l'ensemble P1 est bien plus facile à représenter que l'ensemble H. La suite de la résolution se fait de la même façon que dans la stratégie précédente.

Cependant, la portée de cette stratégie est moins grande car, alors que *H* reste le même pour toute les questions, les Pi changent et l'ensemble de départ avec. De plus, si l'on veut démontrer que les conditions sont aussi suffisantes il faut se placer dans l'ensemble H et donc un nouveau travail est nécessaire.

Cette stratégie donne une condition nécessaire et suffisante à Pi sous l'hypothèse H, la solution trouvée est correcte.

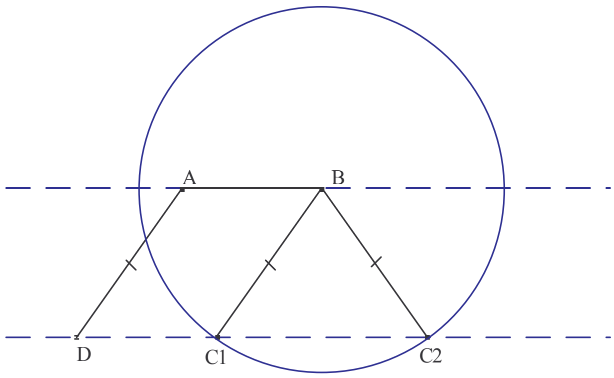
1.5.1. Question 1 (P1 : deux côtés parallèles)

Recherche des configurations : *P1* puis *H*

Cherchons les quadrilatères vérifiant P1 et H.

Une fois A et B placés dans le plan, pour traduire la condition P1, *deux côtés opposés parallèles*, on place C et D sur une droite parallèle à (AB).

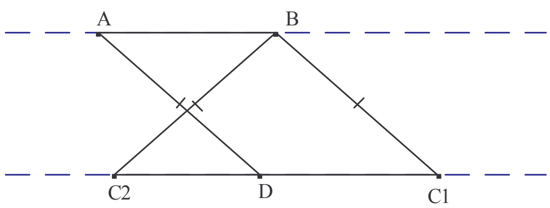
A, B, D fixés, pour que la condition H, *deux côtés opposés de même longueur*, soit vérifiée, c'est-à-dire pour que AD = BC soit vérifié, C doit se trouver sur le cercle de centre B et de rayon AD, il y a deux points C_1 et C_2. On obtient deux configurations : parallélogramme (ABC_1D) et trapèze isocèle (ABC_2D).



[ABC_1D : parallélogramme ; ABC_2D : trapèze isocèle]

Toutefois, résoudre le problème dans le cadre ensembliste revient à faire varier les paramètres utilisés dans cette construction.

A fixé, B et D peuvent se déplacer sur la droite à laquelle ils appartiennent respectivement. Lorsque [BC] croise [AD], soit parce que l'on a déplacé B soit parce que l'on a déplacé D, on obtient une autre configuration : un trapèze isocèle croisé (ABC_2D).



[ABC_1D : parallélogramme ; ABC_2D : trapèze isocèle croisé]

Une fois ces configurations trouvées, la suite de la résolution se fait de la même façon que dans la stratégie précédente.

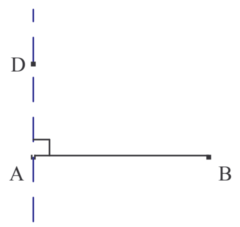
1.5.2. Question 2 (P2 : deux angles droits)

Recherche des configurations : *P2* puis *H*

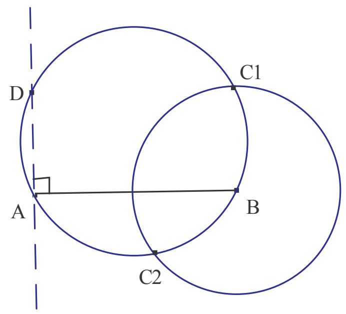
Cherchons les quadrilatères vérifiant P2 *avoir deux angles droits* et H *avoir deux côtés opposés égaux.*

Considérons, dans un premier cas, que les angles droits sont opposés en A et C.

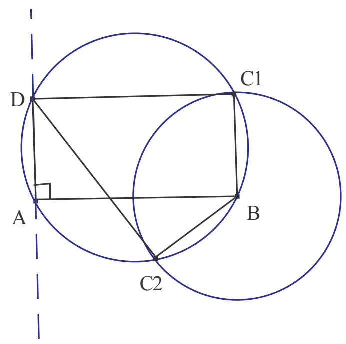
Une fois A et B fixés, pour avoir un angle droit en A, le point D doit se trouver sur la perpendiculaire à (AB) passant par A.



Une fois D fixé, pour avoir un angle droit en C, le point C appartient au cercle de diamètre [BD]. Pour vérifier H, *deux côtés de même longueur*, C appartient au cercle de centre B et de rayon AD. Il y a deux points C_1 et C_2.



On obtient alors deux configurations : rectangle (ABC_1D) et *papillon rectangle* associé au trapèze isocèle dont les diagonales sont perpendiculaires aux côtés qui ne forment pas les bases (ABC_2D).



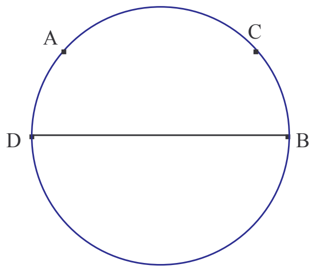
[ABC_1D : rectangle ; ABC_2D : papillon rectangle]

Ces configurations restent les mêmes lorsque l'on fait varier les paramètres de la construction.

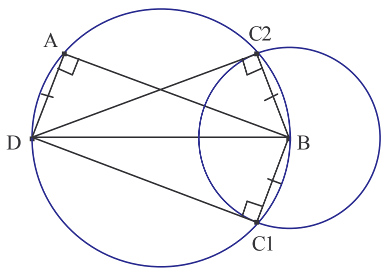
- **Autre méthode**

Nous proposons une méthode de construction légèrement différente.

Si les deux angles droits sont opposés en A et en C, A et C se trouvent tous les deux sur le cercle de diamètre [BD].



Une fois A fixé, il y a deux positions possibles pour C les deux points d'intersection du cercle de centre B et de rayon AD avec le cercle de diamètre [BD], C1 et C2.



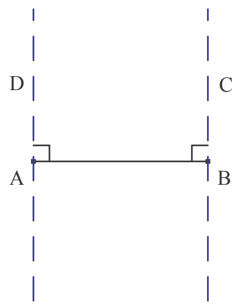
[ABC_1D : rectangle ; ABC_2D : papillon rectangle]

On retrouve ainsi les configurations rectangle et papillon rectangle.

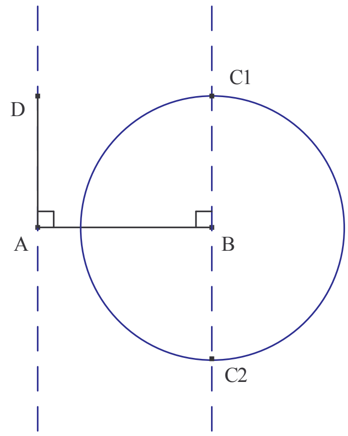
Considérons, maintenant, que les angles droits sont consécutifs. Ces deux angles peuvent toucher les deux côtés égaux (par ex., s'ils sont en A et B) ou bien n'en toucher qu'un seul (par ex., s'ils sont en B et C).

Premier cas : deux angles droits consécutifs en A et B.

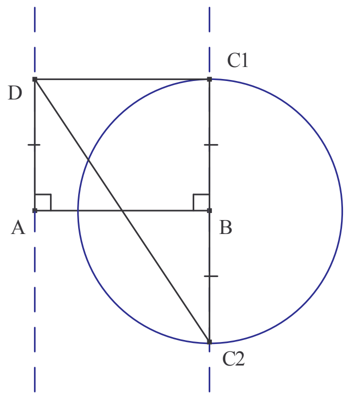
Une fois A et B placés dans le plan, pour que le quadrilatère ait deux angles droits en A et B il faut et il suffit que C (resp. D) appartienne à la droite perpendiculaire à (AB) passant par B (resp. par A).



Une fois D fixé sur cette droite, pour que le quadrilatère vérifie H, c'est-à-dire AD = BC, C doit se trouver sur le cercle de centre B et de rayon AD. Il y a deux points C_1 et C_2.



On obtient deux configurations : rectangle (ABC_1D) et *parallélogramme croisé rectangle*, associé au parallélogramme dont une des diagonales est perpendiculaire aux côtés (ABC_2D).

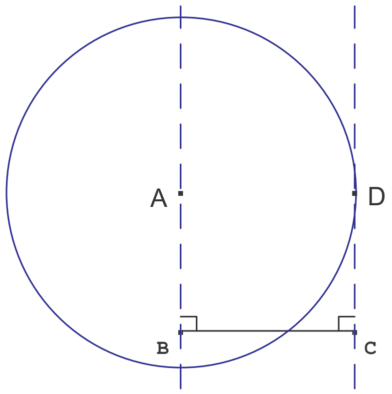


[ABC_1D : rectangle ; ABC_2D : parallélogramme croisé rectangle]

Ces configurations restent les mêmes lorsque l'on fait varier les paramètres de la construction.

Deuxième cas : deux angles droits consécutifs en B et C.

Une fois B, C, A fixés, D est l'unique point d'intersection du cercle de centre A et de rayon BC et de la droite perpendiculaire à BC passant par C. On retrouve la configuration rectangle.



Une fois ces configurations trouvées, la suite de la résolution se fait de la même façon que dans la stratégie précédente.

1.5.3. Question 3 (P3 : deux côtés égaux)

En raison de la symétrie de la question posée, l'hypothèse et la conclusion représentant la même condition, la stratégie ne change pas que l'on commence par construire un quadrilatère vérifiant H ou bien vérifiant P3. En conséquence, la résolution de cette troisième question se fait exactement de la même façon que dans la stratégie ensembliste précédente.

1.6. Figures scolaires, Stratégie 5

Cette approche est basée sur la recherche des configurations vérifiant H et Pi à partir d'un *élément générique* représenté par la *figure scolaire*.

Pouvoir travailler sur un *élément générique* est une caractéristique des mathématiques qui les rend très *puissantes*. Cependant, cela est très ambitieux et même, dans certains cas un peu utopiste. Pour avoir un élément générique, il faut contrôler à chaque propriété qu'on lui rajoute qu'il reste bien générique et qu'on n'utilise pas une propriété intrinsèque à l'élément représenté sur la feuille. Lorsque l'on arrive à garantir cela, cette approche est incomparable et l'on rejoint ainsi le point de vue ensembliste de façon économique puisque sans l'aspect dynamique délicat à appréhender. Cependant ce contrôle est difficile à mettre en oeuvre.

C'est pourquoi, dans l'enseignement, le contrôle sur l'utilisation d'un élément générique est en général réduit à l'utilisation d'un élément *le plus quelconque possible*, par le biais de ce que nous avons appelé les *figures scolaires*. Il s'agit de s'assurer, au départ, que la figure ne représente pas un élément particulier de la classe. Cependant, nous avons vu au chapitre précédent que cela ne suffit pas toujours et ne donne pas forcément une réponse correcte. C'est le cas dans cette situation de géométrie. De plus, puisqu'il n'y a pas de contrôle de l'exhaustivité des cas, rien ne permet de déduire que les conditions obtenues sont nécessaires. Il faut démontrer que ces conditions sont suffisantes pour avoir une réponse à la question, si on ne le prouve pas, les conditions trouvées ne sont ni nécessaires ni suffisantes. Il ne s'agit pas, ici, de trouver des conditions nécessaires et suffisantes mais de trouver *le plus grand nombre possible* de conditions suffisantes.

Nous donnerons un exemple sur la première question de la façon dont on peut mener cette approche en exerçant le contrôle sur l'élément générique tout au long de la résolution (§ 1.6.1). Cependant, nous faisons l'hypothèse que la stratégie s'appuyant sur les pratiques scolaires habituelles, c'est-à-dire sur un *élément quelconque* plutôt que *générique*, a plus de chance d'être mise en œuvre par les PLC2. C'est pourquoi c'est celle que nous détaillerons dans les paragraphes suivants (§ 1.6.2, 1.6.3 et 1.6.4).

1.6.1. Élément générique, Question 1 (P1 : deux côtés parallèles)

Il s'agit dans cette stratégie de travailler sur un élément *générique* de la classe considérée. Pour cela, on utilise une *figure scolaire accompagnée d'un contrôle* du caractère générique de cet élément tout au long de la résolution. Nous appellerons dorénavant *figure générique* une *figure scolaire* accompagnée d'un contrôle. Cette *figure générique* doit, pour le problème considéré, représenter la classe de tous les objets en jeu, pour pouvoir mettre en œuvre des raisonnements et construire des preuves. Autrement dit, on se sert de la figure et de ses propriétés explicites (égalité, inégalité d'angles ou de segments par exemple), mais aussi implicites (existence de points, orientation de polygones…) pour raisonner. Par conséquent, il ne faut pas introduire dans le dessin des propriétés implicites qui limitent la classe d'objets. Par exemple, à partir du dessin d'un triangle dans lequel la bissectrice d'un angle coupe la médiatrice du côté opposé à l'intérieur du triangle, on peut démontrer que tout triangle est isocèle. Autre exemple : un triangle muni d'une hauteur peut nécessiter deux dessins pour assurer le caractère générique de la figure, suivant que l'intersection de la hauteur et de la base existe ou non.

Examinons maintenant comment peut être mise en œuvre l'utilisation d'une *figure générique* pour la caractérisation des quadrilatères (ABCD) ayant deux côtés opposés égaux (H) et deux autres parallèles (P1).

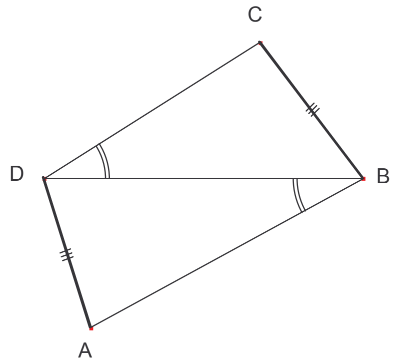
Soit A, B, D, trois points quelconques (qui déterminent donc un triangle quelconque, et ceci quelles que soient leurs positions).

On doit maintenant placer C. A, B et D étant déjà placés, la position de C n'est plus indifférente. A priori, plusieurs choix sont possibles : si on s'intéresse à l'orientation dans le plan des points A, B et C on a deux cas, A et C sont soit du même côté, soit de part et d'autre de la droite BD. On peut, dans un partitionnement plus fin, considérer les sept régions du plan déterminées par les droites AB, AC, BC. Mais comment savoir à l'avance, si ces choix sont pertinents et s'il est nécessaire ou suffisant d'envisager ces différents cas. Cela va dépendre de l'existence des objets que l'on va être amené à considérer en cours de raisonnement. Ce n'est qu'a posteriori que l'on va pouvoir être sûr du caractère générique du (des) figures(s) considérées.

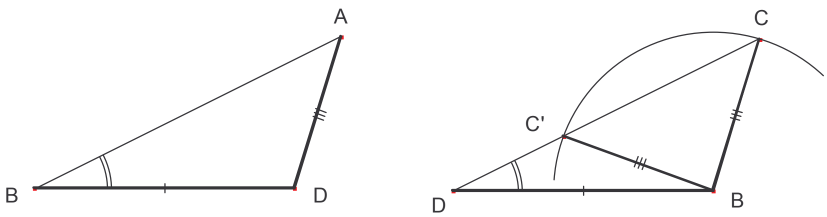
Limitons nous, dans un premier temps, pour notre problème au partage en deux cas.

1.6.1.a) A et C sont de part et d'autre de la droite BD

Les propriétés H et P1 sont indiquées sur la figure : P1 par l'égalité de deux angles alternes-internes ; H par l'égalité des segments AD et BC.

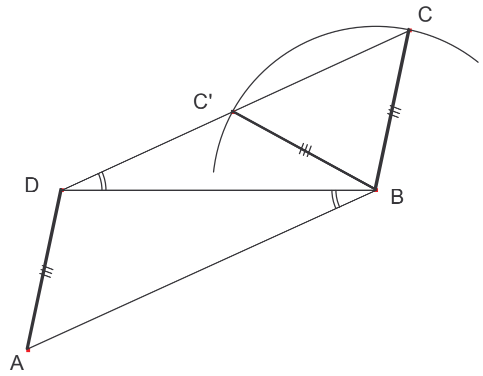


Les deux triangles BDA et DBC ont deux côtés respectivement égaux, et un angle égal (mais cet angle n'est pas formé par les côtés respectivement égaux). On « tombe » sur un pseudo cas d'égalité des triangles. En plus du cas où les triangles BDA et DBC sont égaux on a un autre cas représenté par le point C'.



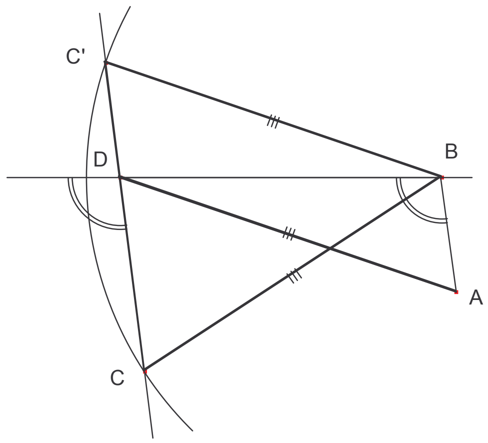
On peut remarquer que C' peut se trouver de l'autre côté de la droite BD (ce qui nous situe dans le cas 2).

On obtient ainsi les deux classes d'objets : le parallélogramme et le trapèze isocèle, croisé ou non.



1.6.1.b) A et C sont du même côté de la droite BD

Dans ce cas, on a nécessairement AD=BC<BD. Un seul point C est possible. On obtient le trapèze isocèle croisé. Remarquons que le « deuxième point » C possible (C') se trouve de l'autre côté de la droite BD et redonne un parallélogramme.



A posteriori on s'aperçoit que l'on pouvait se dispenser de considérer deux cas distincts.

On le voit bien ici, le type de raisonnement que l'on vient d'ébaucher, va bien au-delà de l'utilisation d'une figure scolaire. Un contrôle ensembliste, portant notamment sur l'existence ou la non existence des objets considérés, est nécessaire. Or, ces problèmes d'existence ne sont en général, sans doute à cause de leur difficulté, pas questionnés dans l'enseignement.

1.6.2. Élément quelconque, Question 1 (P1 : deux côtés parallèles)

Pour la recherche des objets vérifiant H et Pi, on construit un élément *le plus quelconque possible* vérifiant H et Pi, autrement dit, un élément vérifiant uniquement H et Pi. Pour cela, on utilise une *figure scolaire*, représentant un triangle ABD *quelconque* avant de déterminer D en fonction des propriétés en jeu.

Les trois configurations vérifiant H et P1 (trapèze isocèle, parallélogramme, trapèze isocèle croisé) ne peuvent être trouvées à partir du même triangle quelconque. Il s'ensuit que le résultat est forcément incomplet. Les points étant fixés, les résultats trouvés sont toujours des cas particuliers incomplets que ce soit dans la recherche de conditions vérifiant H et Pi ou dans la preuve que les conditions Ai sont suffisantes.

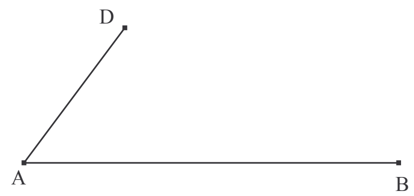
Nous avons choisi de détailler cette stratégie sur les configurations *parallélogramme* et *trapèze isocèle* car nous avons fait l'hypothèse qu'elles étaient plus susceptibles d'émerger d'après l'aspect visuel du triangle de départ. Cela revient, en fait, à nous placer à l'intérieur de l'ensemble des quadrilatères convexes.

La solution donnée est incomplète pour les trois questions.

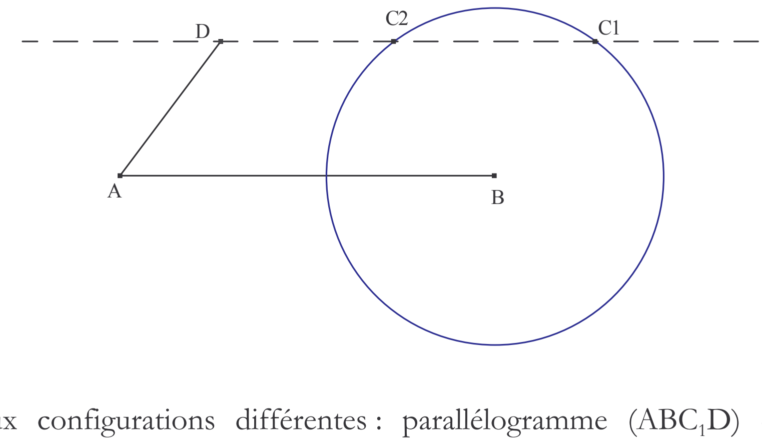
1.6.2.a) Recherche des configurations

Cherchons les quadrilatères vérifiant P1 et H.

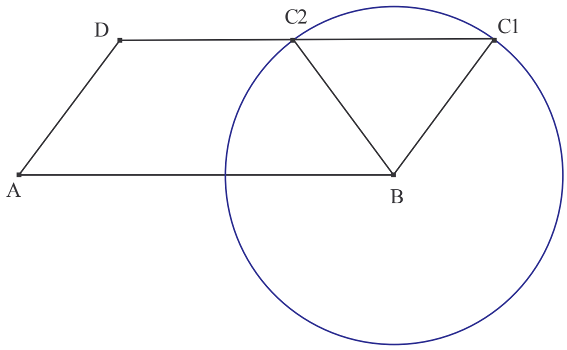
Traçons un triangle quelconque ABD.



Pour vérifier P1, *les deux autres côtés parallèles*, le point C doit se trouver sur la droite parallèle à (AB) passant par D. Pour vérifier H, *AD=BC*, on « reporte » la longueur AD à partir de B avec un arc de cercle. Il y a deux points d'intersection (éventuellement confondus) C1 et C2.



On obtient deux configurations différentes : parallélogramme (ABC_1D) et trapèze isocèle (ABC_2D).



[ABC_1D : parallélogramme ; ABC_2D : trapèze isocèle]

Par cette construction basée sur un triangle *quelconque*, on trouve ainsi des configurations vérifiant H et P1 : les parallélogrammes et les trapèzes isocèles.

1.6.2.b) Les conditions sur les diagonales

Être un parallélogramme équivaut, pour un quadrilatère, à avoir *les diagonales qui se coupent en leur milieu*.

Les trapèzes isocèles ont des *diagonales de même longueur*.

On a ainsi les conditions sur les diagonales :

$$\begin{cases} \text{diagonales se coupent en leur milieu} \\ \text{diagonales de même longueur} \end{cases}$$

Ceci peut être une réponse.

On peut aussi se poser la question de savoir si ces conditions sont des conditions suffisantes, c'est ce que nous allons développer.

1.6.2.c) Interprétation logique

La construction basée sur ce triangle restreint implicitement le problème à l'ensemble des convexes, cependant rien dans cette stratégie ne permet de prendre en compte cette restriction. Dans l'ensemble des quadrilatères on n'a pas d'équivalence entre les configurations trouvées et les propriétés H et P1, on a uniquement l'implication :

$$\left.\begin{array}{l} \text{être un parallélogramme} \\ \text{ou} \\ \text{être un trapèze isocèle} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (\text{ H et P1 })$$

Ce qui se formule en termes d'ensembles :

$$H \cap P_1 \supset \{\textit{Parallélogrammes}\} \cup \{\textit{Trapèzes isocèles}\}$$

Par suite, on obtient en fait deux implications.

$$\text{H et P1} \;\Leftarrow\; \left\{\begin{array}{l}\text{être un parallélogramme}\\ \text{ou}\\ \text{être un trapèze isocèle}\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l}\text{diag. se coupent en leur milieu}\\ \text{ou}\\ \text{diag. de même longueur}\end{array}\right.$$

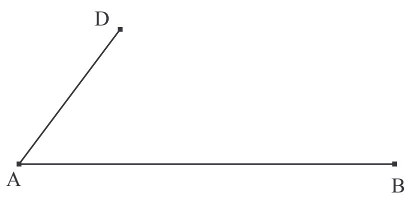
Les conditions trouvées ne sont ni des conditions nécessaires ni des conditions suffisantes à H et P1. Dans l'ensemble des convexes, ce sont des conditions nécessaires.

1.6.2.d) Ces conditions sont-elles des conditions suffisantes ?

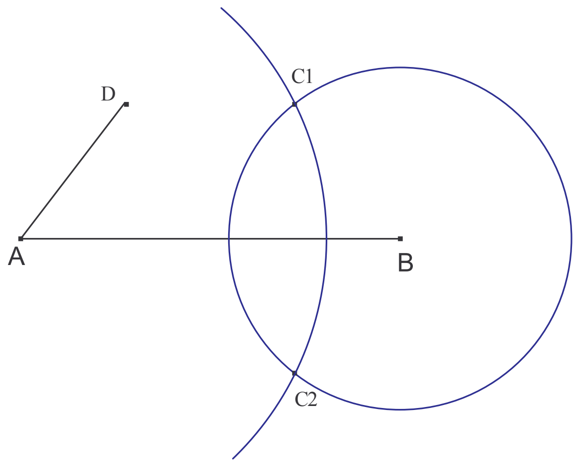
La propriété *avoir ses diagonales qui se coupent en leur milieu* (A1) est bien une condition suffisante.

Reste à examiner si la propriété *avoir ses diagonales de même longueur* (A2) est une condition suffisante.

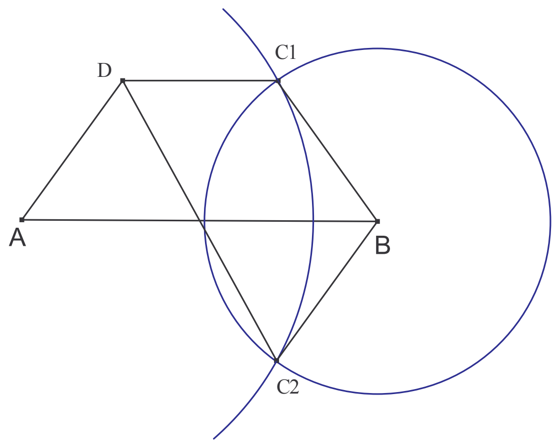
Pour construire les quadrilatères qui vérifient H et A2, reprenons un triangle quelconque.



Pour vérifier H, C doit se trouver sur le cercle de centre B et de rayon AD. Pour vérifier A2, C doit se trouver sur le cercle de centre A et de rayon DB. Il y a, pour cette *figure scolaire* deux points d'intersection.



On a donc les configurations *trapèze isocèle* (ABC_1D) et *parallélogramme croisé* (ABC_2D).



[ABC_1D : trapèze isocèle ; ABC_2D : parallélogramme croisé]

Soit on se place explicitement dans les quadrilatères convexes et alors on a bien une condition suffisante sous H pour P1. La résolution est alors terminée, les deux conditions

- Des diagonales de même longueur
- Des diagonales qui se coupent en leur milieu

sont des conditions suffisantes, sous H, pour P1.

Soit on ne se place pas explicitement dans les convexes et il faut éliminer le cas croisé. Pour cela on peut par exemple prendre la condition :

A2b : *diagonales de même longueur et non parallèles*

Les éléments ne variant pas, avec ce triangle quelconque de départ, le cas du rectangle croisé n'a pas de raison d'émerger. Rappelons que le rectangle croisé ne vérifie pas A2b mais vérifie bien H et P1, il n'a pas de raison d'apparaître ici. La résolution est donc terminée.

Les deux conditions :

- Des diagonales de même longueur et non parallèles
- Des diagonales qui se coupent en leur milieu

sont des conditions suffisantes, sous H, pour P1.

1.6.3. Élément quelconque, Question 2 (P2 : deux angles droits)

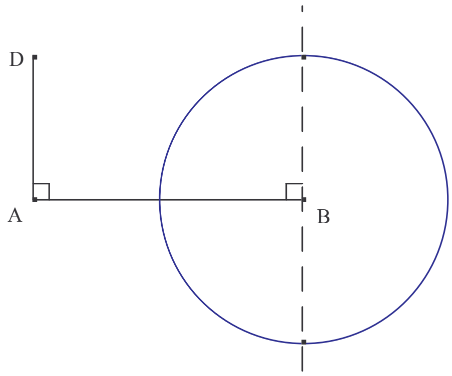
1.6.3.a) Recherche des configurations

Cherchons les quadrilatères vérifiant P2 *avoir deux angles droits* et H *avoir deux côtés opposés égaux.*

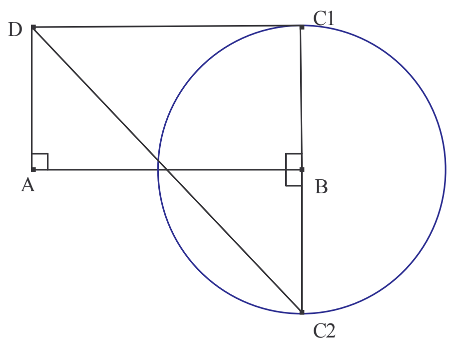
Considérons, dans un premier cas, que les angles droits sont consécutifs en A et B.

Pour la construction, partons d'un triangle rectangle en A *quelconque*.

Pour vérifier H, le point C appartient au cercle de centre B et de rayon AD. Pour vérifier P2, C appartient à la droite perpendiculaire à (AB) passant par B. Il y a deux points d'intersection.



On trouve deux configurations : rectangle (ABC_1D) et *parallélogramme croisé rectangle*, associé au parallélogramme dont les côtés sont perpendiculaires aux diagonales (ABC_2D)

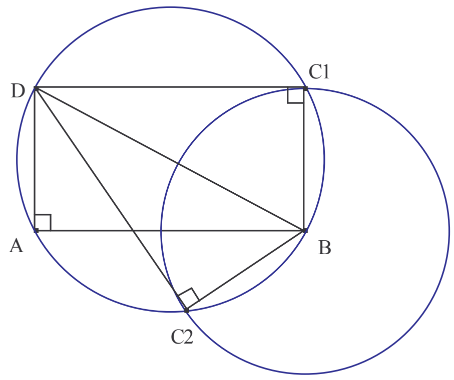


[ABC_1D : rectangle ; ABC_2D : parallélogramme croisé rectangle]

Considérons, dans un deuxième cas, que les angles droits sont opposés en A et C.

Reprenons le triangle rectangle en A.

Pour vérifier H et P2, le point C appartient à l'intersection du cercle de centre B et de rayon AD et du cercle de diamètre [BD].



[ABC_1D : rectangle ; ABC_2D : croisé papillon rectangle]

On a les configurations rectangle et *croisé papillon rectangle*, associé au trapèze isocèle ayant des diagonales perpendiculaires aux côtés.

1.6.3.b) Les conditions sur les diagonales

Être un rectangle équivaut, pour un quadrilatère, à avoir *des diagonales de même longueur qui se coupent en leur milieu*.

Les quadrilatères croisés *papillon rectangle* et *parallélogramme croisé rectangle* ont des *diagonales parallèles*.

On a ainsi les conditions sur les diagonales :

$$\begin{cases} \text{diagonales de même longueur qui se coupent en leur milieu} \\ \text{diagonales parallèles} \end{cases}$$

Ceci peut être une réponse.

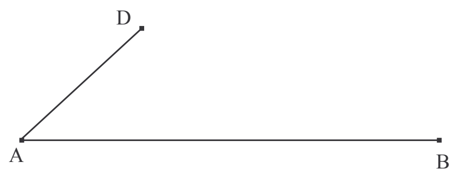
On peut aussi se poser encore la question de savoir si ces conditions sont des conditions suffisantes, c'est ce que nous allons développer.

1.6.3.c) Ces conditions sont-elles des conditions suffisantes ?

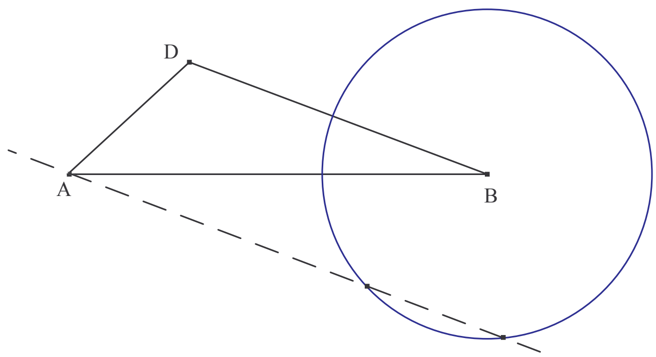
La propriété *avoir ses diagonales qui se coupent en leur milieu* (A1) est bien une condition suffisante puisqu'il y a équivalence.

Reste à examiner si la propriété *avoir ses diagonales parallèles* (A2) est une condition suffisante.

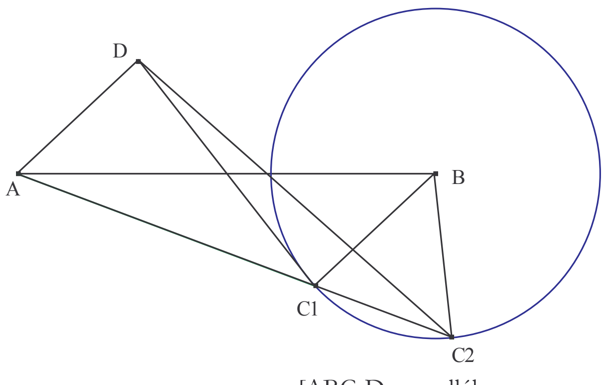
Pour construire les quadrilatères qui vérifient H et A2, reprenons un triangle quelconque.



Pour vérifier H et *les diagonales parallèles*, C doit être le point d'intersection du cercle de centre B et de rayon AD avec la droite parallèle à (BD) passant par A. Il y a deux points d'intersection.



On trouve deux configurations (ABC_1D) et (ABC_2D) qui ne vérifient ni l'une ni l'autre la propriété P2.



[ABC_1D : parallélogramme croisé; ABC_2D : croisé papillon]

La propriété *diagonales parallèles* n'est donc pas une condition suffisante sous H pour P2.

En réponse à la question, nous pouvons seulement dire que la condition *avoir des diagonales égales qui se coupent en leur milieu* est une condition suffisante pour P2 sous H.

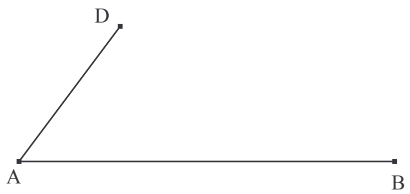
La stratégie basée sur les *figures scolaires* ne permet pas de donner d'autres conditions suffisantes, pour expulser les éléments qui ne vérifient pas P2, il faut passer à une stratégie ensembliste.

1.6.4. Élément quelconque, Question 3 (P3 : deux côtés égaux)

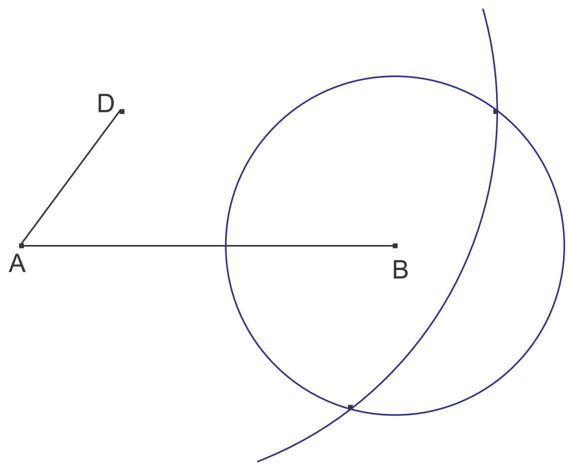
1.6.4.a) Recherche des configurations

Cherchons les quadrilatères vérifiant P3 et H.

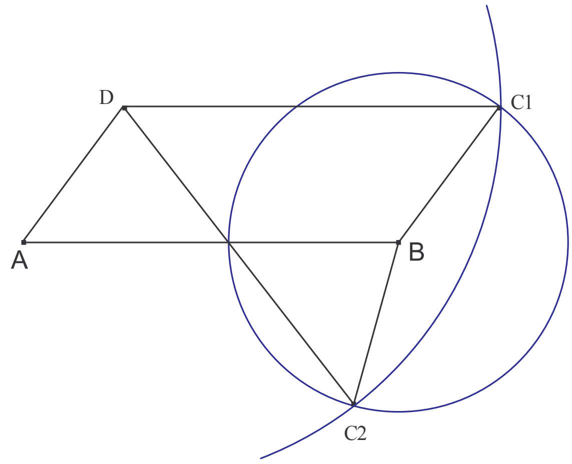
Traçons un triangle quelconque ABD.



Pour vérifier H, AD = BC, et P3, AB = DC, le point C doit être l'intersection du cercle de centre B et de rayon AD et du cercle de centre D et de rayon AB.



Il y a deux points d'intersection, ce qui donne deux configurations : un parallélogramme (ABC_1D) et un quadrilatère croisé papillon (ABC_2D).



[ABC_1D : parallélogramme ; ABC_2D croisé papillon]

1.6.4.b) Les conditions sur les diagonales

Être un parallélogramme équivaut, pour un quadrilatère, à avoir *les diagonales qui se coupent en leur milieu*.

Les croisés papillons, associés aux trapèzes isocèles ont des *diagonales parallèles*.

On a ainsi les conditions sur les diagonales :

$$\begin{cases} \text{diagonales se coupent en leur milieu} \\ \text{diagonales parallèles} \end{cases}$$

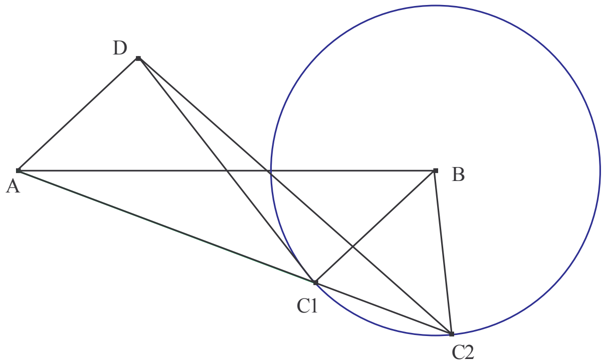
Ceci peut être une réponse.

On peut aussi se poser encore la question de savoir si ces conditions sont des conditions suffisantes, c'est ce que nous allons développer.

1.6.4.c) Ces conditions sont-elles des conditions suffisantes ?

La propriété *avoir ses diagonales qui se coupent en leur milieu* (A1) est bien une condition suffisante.

Reste à examiner si la propriété *avoir ses diagonales parallèles* (A2) est une condition suffisante. Nous avons déjà cherché les configurations vérifiant H et A2 à la question précédente, il y en a deux : *parallélogramme croisé* et *croisé papillon*.



[ABC_1D : parallélogramme croisé ; ABC_2D : croisé papillon]

Le croisé papillon vérifie P2 mais le parallélogramme croisé ne vérifie pas P2. A2 n'est donc pas une condition suffisante pour P2 sous H

1.6.4.d) Trouver une condition suffisante

Il faut réduire A2 afin d'éliminer le cas du parallélogramme croisé.

Par exemple la condition :

A2b : *diagonales parallèles symétriques l'une de l'autre par rapport à une droite*

convient puisque, *dans la figure ci-dessus* qui a rôle d'élément générique, elle permet d'éliminer le cas du parallélogramme croisé.

De même, la condition :

A2c : *diagonales parallèles et de longueurs différentes*

convient aussi puisque, *dans la figure ci-dessus*, elle permet d'éliminer le cas du parallélogramme croisé.

La résolution est terminée. Les conditions :

- des diagonales qui se coupent en leur milieu
- des diagonales parallèles symétriques l'une de l'autre par rapport à une droite
- des diagonales parallèles de longueurs différentes

sont des conditions suffisantes pour P3 sous H.

1.7. Quelques remarques sur les stratégies détaillées

1.7.1. La question porte sur les conditions nécessaires et suffisantes

Nous avons dit que la question pouvait porter sur les conditions *nécessaires* ou les conditions *suffisantes*. Nous faisons l'hypothèse qu'elle sera comprise comme portant sur les *conditions suffisantes* pour Pi. Toutefois, ceci avec la restriction que la recherche porte sur *toutes les conditions suffisantes possibles*, à une équivalence près.

Par exemple, nous faisons l'hypothèse que les professeurs stagiaires ne se satisferont pas de l'unique condition suffisante *avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu* pour P1 et qu'ils chercheront d'autres, et même toutes les autres, conditions suffisantes pour P1.

Cela revient, en réalité, à chercher une condition *nécessaire et suffisante*. En effet, si l'on se place dans le cadre ensembliste, trouver toutes les conditions suffisantes (strictement) pour P1 revient à chercher tous les sous-ensembles inclus (strictement) dans *P1*. Alors l'union de tous ces sous-ensembles est l'ensemble *P1* lui-même et la disjonction de toutes les conditions est une condition *nécessaire et suffisante*.

Toutefois, ceci est une analyse théorique. D'abord, tous les ensembles inclus strictement dans *P1* ne sont pas à prendre en compte. En effet, si une condition A est suffisante, c'est-à-dire si l'ensemble *A* est inclus dans *P1*, alors toute condition (A et B) peut être éliminée puisque déjà énoncée, c'est-à-dire que tout ensemble strictement inclus dans *A* n'est plus à prendre en compte. D'autre part, les conditions doivent pouvoir être exprimées suffisamment facilement et clairement, les propriétés décrivant les ensembles ne sont pas toutes aussi accessibles, certains ensembles sont donc préférables à d'autres. Enfin, en conséquence de ce qui vient d'être dit, nous faisons l'hypothèse que *trouver toutes les conditions suffisantes* signifie en fait *trouver toutes les conditions suffisantes facilement exprimables*. Par suite, l'union des sous-ensembles trouvés n'est pas forcément égale à *P1* et la disjonction des conditions énoncées n'est pas forcément une condition nécessaire. Notre hypothèse est que la condition cherchée peut s'énoncer comme *la plus faible condition suffisante facilement exprimable,* c'est-à-dire que l'ensemble correspondant est *le plus grand ensemble inclus strictement dans P1 qui peut se décrire simplement*.

1.7.2. Apports des différentes stratégies

En raison de ce que nous avons dit au paragraphe précédent, nous qualifions les stratégies en termes de « satisfaisantes ou non » par rapport à la question et non pas en termes de « correctes ou non ». En effet, une réponse qui donnerait une seule condition suffisante ne pourrait être qualifiée d'incorrecte, pourtant nous faisons l'hypothèse qu'elle ne sera pas reconnue satisfaisante.

La première et la deuxième stratégie, basées respectivement sur l'approche par listage des *conditions suffisantes et* sur l'approche par les *configurations connues*, ne donnent pas une réponse satisfaisante au problème, elles permettent de trouver tout au plus une ou deux conditions, suffisantes dans le premier cas, nécessaires dans le deuxième. Les stratégies 3 et 4, basées sur l'approche *ensembliste*, donnent la réponse la plus complète avec des conditions nécessaires et suffisantes. Enfin, la dernière stratégie, basée sur les figures scolaires, suivant comment elle est menée, avec contrôle permanent ou non, donne une réponse plus ou moins complète.

Pour les deux premières stratégies, la recherche se fait « au hasard » puisque l'on teste des conditions choisies arbitrairement, dans le premier cas, et des configurations que l'on connaît dans le deuxième. Aucun moyen de contrôle sur l'exhaustivité des cas n'est mis en place dans ces stratégies et, dans ce problème, beaucoup de conditions « échappent » à la résolution. Dans les stratégies ensemblistes 3 et 4, le contrôle, garanti par l'aspect dynamique, fait partie de la résolution du problème, il est omniprésent. Enfin, dans la dernière stratégie, le contrôle se fait, au départ, sur l'hypothèse que la figure initiale représente un élément générique de la classe considérée. Soit le contrôle global de la stratégie est restreint à celui-ci, comme dans le cas que nous avons développé, soit l'aspect générique de la figure scolaire est contrôlé tout au long de la stratégie.

Les stratégies ensemblistes 3 et 4 ont un aspect dynamique très fort, à la fois dans la recherche de la solution et dans le contrôle des configurations trouvées. Cette dynamique est due à l'utilisation des *figures ensemblistes*. Au contraire, les deux premières stratégies sont totalement statiques. La dernière stratégie, à partir d'une figure scolaire est statique bien que l'aspect dynamique soit approché parfois lorsque, contrôlant la figure tout au long de la résolution, on est amené à changer sa « forme » pour ne pas oublier de cas.

La première stratégie, par listage des condition, appartient au cadre du raisonnement déductif. Elle permet de reformuler le problème de telle façon qu'on puisse le résoudre par un raisonnement déductif. Les autres stratégies peuvent être rapprochées du cadre ensembliste à des degrés divers. Les stratégies 3 et 4 symbolisent le cadre ensembliste avec l'utilisation des *figures ensemblistes*, tous les objets de la classe considérée sont parcourus. Dans la dernière stratégie, pour accéder à tous les objets de la classe, on considère un objet *quelconque* ou *générique* de cette classe grâce aux *figures scolaires*. Enfin, dans la deuxième stratégie (configurations connues) on se place d'emblée dans l'ensemble des objets institutionnels, le cadre ensembliste est alors très restreint et perd sa portée. De plus, pour cette deuxième stratégie, on considère les objets pour leurs qualités et non comme faisant partie d'un ensemble, on est alors beaucoup plus proche des pratiques habituelles de l'enseignement de la géométrie que du cadre ensembliste.

1.7.3. Hypothèses sur leur utilisation

Les stratégies 1, 2 et 5, basées respectivement sur le listage des conditions suffisantes, la reconnaissance de configurations connues et l'utilisation de figures scolaires, sont les plus proches de ce qui est fait habituellement dans l'enseignement des mathématiques. Au contraire, les stratégies 3 et 4 utilisant le cadre ensembliste n'y sont pas utilisées.

Pour les raisons énoncées au paragraphe précédent, nous faisons l'hypothèse que, les deux premières stratégies, même si elles apparaissent comme premier moyen de « rentrer dans le problème », ne seront pas jugées suffisantes par les PLC2. Cependant, ces stratégies, très économiques pour trouver une ou deux conditions, se révèlent un outil pour que la dévolution de notre problème soit bonne.

D'autre part, l'appréhension dynamique des figures n'est pas aisée et surtout inhabituelle dans l'enseignement secondaire. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que les stratégies ensemblistes 3 et 4 ne seront que partiellement utilisées même si le problème favorise le cadre ensembliste.

Enfin, nous faisons l'hypothèse que la stratégie la plus susceptible d'émerger est celle basée sur les *figures scolaires*. Bien que la solution trouvée apparaisse insuffisante, elle est plus proche de ce qui est fait dans l'enseignement que les stratégies 3 et 4 et donne un résultat plus satisfaisant que les deux premières stratégies.

1.7.4. Le cadre ensembliste n'est pas utilisé seul

Le point de vue ensembliste que nous avons décrit dans les stratégies 3 et 4 n'utilise pas uniquement les outils du cadre ensembliste. En effet, nous avons nous-même montré comment les outils logiques (§1.4.1.c par exemple) pouvaient permettre une interprétation de ce qui a été fait et un contrôle sur la manière de mener la recherche. Un éclairage logique permet souvent de *faire le point* sur l'étude.

D'autre part, pour démontrer certaines implications, des théorèmes connus peuvent être utilisés et le recours au raisonnement déductif est un complément habituel du point de vue ensembliste.

1.7.5. Adaptation ou combinaison de différentes stratégies

Les stratégies détaillées sont des exemples de différents types et ne sont pas exclusives. Nous voulons dire que certaines stratégies peuvent être adaptées dans leur utilisation.

Par exemple, les stratégies peuvent être ensemblistes à différents degrés. On peut essayer d'utiliser une stratégie ensembliste tout en décidant de se limiter aux quadrilatères non croisés, le point de vue ensembliste y perd alors beaucoup.

Dans l'approche par *configurations connues*, le trapèze isocèle peut être trouvé non pas directement mais en déplaçant l'un des sommets du parallélogramme.

Dans l'approche par les *figures scolaires*, pour traduire une égalité de longueurs, au lieu de tracer un cercle, le report de mesure se fait souvent uniquement par un arc de cercle. Alors, l'habitude des figures *prototypiques*, peut amener à éliminer un point d'intersection implicitement en ne traçant l'arc de cercle que du *bon côté*.

Enfin, ces stratégies ne s'excluent pas les unes les autres. L'approche par les *configurations connues*, économique au début mais insuffisante, peut être suivie d'une autre stratégie. Nous n'attendons pas de voir les stratégies décrites suivies du début à la fin. Nous allons essayer de repérer des *moments* de la recherche où les approches décrites émergeront, par petits bouts peut-être, au cœur d'allers-retours entre différentes stratégies probablement.

1.8. Les choix didactiques pour la situation *Géométrie 1*

Les valeurs des variables globales sont pour les objets, objets institutionnels mais dans une classe non institutionnelle, pour le type de tâche, élaboration de preuve, pour l'organisation sociale une recherche individuelle suivie d'une recherche en petits groupes, et enfin la problématisation des trois cadres, en particulier celle du cadre ensembliste rendu nécessaire pour la résolution complète de la tâche.

Nous reprenons les notations précédentes pour l'implication en jeu : Sous H, A $\Rightarrow$ P. La propriété H est la propriété *avoir deux côtés opposés égaux*, P représente les propriétés P1, P2 ou P3, A représente la condition sur les diagonales cherchée.

Nous notons *H* (respectivement *A*, *P*), l'ensemble des objets qui vérifient la propriété H (respectivement A, P). Nous exprimons maintenant les choix faits en fonction des caractéristiques de H, A et P. Nous avons distingué deux types de choix, ceux pour favoriser un travail dans le cadre ensembliste, ceux pour permettre un travail sur l'implication.

1.8.1. Choix pour favoriser un travail dans le cadre ensembliste

1.8.1.a) Classes d'objets non institutionnelles dans l'enseignement

H est la classe des quadrilatères qui ont deux côtés opposés égaux. H doit alors être explicite durant tout le problème et il faut travailler avec des propriétés non connues a priori.

H, A et *P* contiennent les quadrilatères croisés et concaves. Or les quadrilatères croisés ne sont pas enseignés, en particulier ils ne sont pas différenciés les uns des autres et sont tous mis à part sous l'étiquette *croisés*. Il est donc nécessaire de faire un travail de définition pour différencier les quadrilatères croisés mis en jeu dans la situation puisqu'ils ne sont pas tous du même type.

La présence des quadrilatères croisés dans le problème rend nécessaires les stratégies du cadre ensembliste (3 et 4). En effet, les connaissances qu'ils ont sur les classes de quadrilatères institutionnels ne sont pas suffisantes pour donner une réponse satisfaisante. Les stratégies de base sont donc insuffisantes et il faut passer à une stratégie du cadre ensembliste pour résoudre le problème de manière complète.

1.8.1.b) H est identique pour les trois questions

Il faut se placer dans la classe *H* pour la résolution de chacune des questions. C'est pourquoi, nous faisons l'hypothèse que la stratégie 3 dans le cadre ensembliste est moins coûteuse sur la durée.

1.8.2. Choix pour un travail sur l'implication

1.8.2.a) Structure du problème

La condition A est inconnue. Nous faisons l'hypothèse que cette structure, en bouleversant le sens du raisonnement déductif, rend improbable le recours à une conception causale.

D'autre part, le recours à la contraposée, est rendu très difficile puisque Non P est la propriété *avoir deux côtés opposés non parallèles*. Or cette propriété non *remarquable* est difficile à utiliser dans une résolution.

La condition A est de la forme (A1 ou A2). Alors que les implications habituellement enseignées sont de la forme (H et A1 et A2) $\Rightarrow$ P avec des hypothèses s'ajoutant les unes aux autres, l'implication est ici de la forme [H et (A1 ou A2)] $\Rightarrow$ P. Nous faisons l'hypothèse qu'elle est ainsi plus difficile à décrire et à prouver.

Comme la classe *H* n'est pas institutionnalisée, pour la recherche des conditions nécessaires, il n'est pas possible de se placer dans la classe *H* et de regarder l'implication P $\Rightarrow$ A, il faut garder

H explicite et considérer l'implication (H et P) ⇒ A. H doit aussi être explicite dans la recherche des contre-exemples qui doivent vérifier (H et A et Non P).

1.8.2.b) Formulation de la question

Notre question oblige un questionnement sur le sens (⇒, ⇐) de l'implication puisque elle ne précise pas si les conditions cherchées doivent être nécessaires ou suffisantes.

2. Situation *Géométrie 2*

Rappelons le texte du problème.

> Soit ABCD un quadrilatère qui a deux côtés opposés de même longueur.
>
> À quelles conditions sur les diagonales a-t-on :
> - (P3) les 2 autres côtés sont de même longueur (entre eux) ?
>
> Une condition nécessaire et suffisante est que "les diagonales se coupent en leur milieu" *(on l'appellera C1).*
>
> Que pensez-vous de l'échange suivant ?
> *X : Mais attends, la condition "une des diagonales coupe l'autre en son milieu" est peut-être aussi une condition nécessaire et suffisante ! (on l'appellera C2)*
> *Y : Impossible puisque cette condition (C2) est strictement plus faible que (C1) !*

Dans la suite de l’analyse nous appellerons :

- *Q* : Ensemble des quadrilatères
- *H* : Ensemble des quadrilatères ayant deux côtés opposés égaux (H la propriété associée)
- *NC* : Ensemble des quadrilatères non croisés
- *Cvxe* : Ensemble des quadrilatères convexes
- C_1 : Ensemble des quadrilatères dont les diagonales se coupent en leur milieu (C1)
- C_2 : Ensemble des quadrilatères dont les diagonales se coupent au milieu de l’une d’elles (C2)
- *P3* : Sous-ensemble de H, des quadrilatères ayant les deux autres côtés égaux (P3)

2.1. Type de tâche et questionnement

La tâche consiste en une analyse mathématique et logique d'un échange d'arguments à propos du résultat d'une preuve sur laquelle les PLC2 ont travaillé la semaine précédente. Des sous-tâches peuvent-être associées à ce problème (sans nécessité) en tant que réponses à différentes questions. On peut, par exemple, mettre en doute la première affirmation *C1 est une condition nécessaire et suffisante* même si pour discuter de l'échange on n'a pas besoin de connaître sa valeur de vérité. On peut s'interroger sur l'échange entre X et Y d'un point de vue logique, on peut aussi s'interroger sur la seule phrase de X *C2 est une condition nécessaire et suffisante pour P3*. Enfin, on peut rechercher l'ensemble sur lequel C1 et C2 sont équivalentes.

L'analyse d'échanges peut se faire dans le cadre logique ou dans le cadre ensembliste. Dans le dernier cas on peut répondre en donnant, par exemple, une représentation par des patates ou un contre-exemple dans une classe de quadrilatère. D'autre part, le cadre ensembliste est un outil nécessaire pour travailler sur les ensembles C2 et C3 et trouver l'ensemble sur lequel il y a égalité des deux.

Avec ce problème, nous voulons observer les manifestations éventuelles dues cadres ensemblistes et logiques sur l'implication dans un contexte mathématique. Nos questions sont les suivantes : les cadres de la logique formelle et de la théorie des ensembles sont-ils mobilisables chez les PLC2 ? et si oui, leur paraissent-ils pertinents pour résoudre ce problème ? un travail dans le cadre de la logique formelle peut-il avoir lieu sans faire référence à un contexte mathématique et à des propriétés d'objets ? notre question étant posée dans le contexte d'une preuve en géométrie, les PLC2 vont-ils la décontextualiser et ne la regarder que dans le cadre de la logique formelle ? Enfin, l'utilisation de ce cadre peut-elle entrer en conflit avec l'utilisation du cadre du raisonnement déductif ? Le cadre du raisonnement déductif peut-il remettre en cause l'utilisation du cadre de la logique et vice-versa ?

Nous proposons ici deux approches qui induisent des stratégies de résolution différentes. La première approche est de ne considérer que la validité de la phrase dite par Y, alors que la deuxième approche s'intéresse aux autres questions mentionnées ci-dessus. La première approche peut induire des stratégies *décontextualisées* par rapport à ce problème, basées sur des propriétés du cadre logique ou sur un contre-exemple, ou au contraire une stratégie *contextualisée* qui prend en compte les contenus sémantiques relatifs au problème mathématique. La deuxième approche peut induire deux stratégies, l'une basée sur le point de vue ensembliste, l'autre réduite aux quadrilatères convexes. L'énoncé de ces quatre stratégies n'a pas la prétention d'être exhaustif mais leur description permet une analyse pertinente de notre tâche en ce qu'elle permet de présenter la résolution dans différents cadres. En particulier, des résolutions mêlant plusieurs des stratégies présentées ou, au contraire, n'utilisant qu'une partie d'une des stratégies sont très susceptibles d'émerger.

2.2. Validité de la phrase de Y, Stratégie 1 : Cadre logique

L'argument de Y n'est pas valable.

Deux conditions qui ne sont pas équivalentes peuvent être équivalentes lorsqu'une troisième condition est vérifiée. C'est-à-dire qu'on peut avoir : « A $\Leftrightarrow$ B » est fausse mais, « (A et H) $\Leftrightarrow$ (B et H) » est vraie.

Nous faisons l'hypothèse que cet argument théorique est peu convaincant s'il est donnée seul, et qu'il sera donc probablement accompagné d'un contre-exemple.

2.3. Validité de la phrase de Y, Stratégie 2 : Contre-exemple

L'argument de Y n'est pas valable. Prenons comme propriétés :

H : être un parallélogramme
C1 : avoir 4 angles droits
C2 : avoir 1 angle droit

Dans les quadrilatères, la condition C2 est strictement plus faible que la condition C1. Pourtant, dans les parallélogrammes, ces deux conditions sont équivalentes.

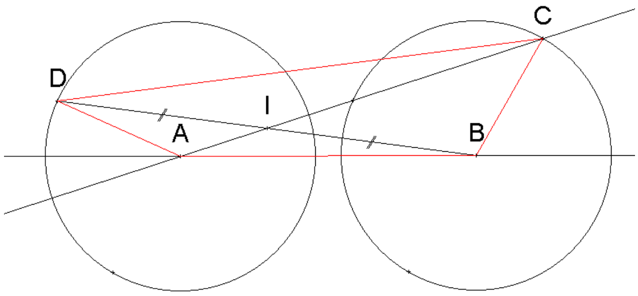
Ce choix de propriétés est donc un contre-exemple à l'argument de Y.

Nous faisons l'hypothèse que certains contre-exemples, facilement mobilisables, et à la portée de tous, convaincront plus facilement qu'un argument théorique qu'il soit logique ou ensembliste.

2.4. Validité de la phrase de Y, Stratégie 3 : Contenus sémantiques

Y a raison, dans ce problème-là, C2 n'est pas une condition suffisante pour P3 sous H. Il suffit de regarder le contre-exemple[69] ci-dessous qui vérifie H et C2 mais pas P3.

[69] Il s'agit ici d'un contre-exemple à la conjecture énoncée par X et non pas comme dans la stratégie précédente d'un contre-exemple à l'argument énoncé par Y.

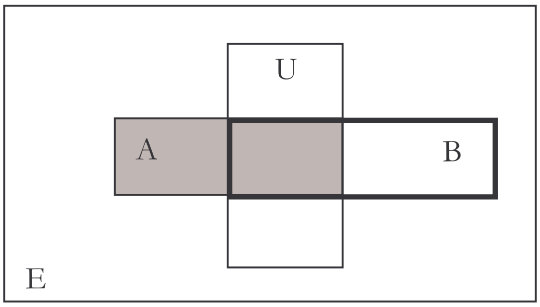


2.5. Réponse à toutes les questions, Stratégie 4 : Cadre ensembliste

2.5.1. Échange entre X et Y

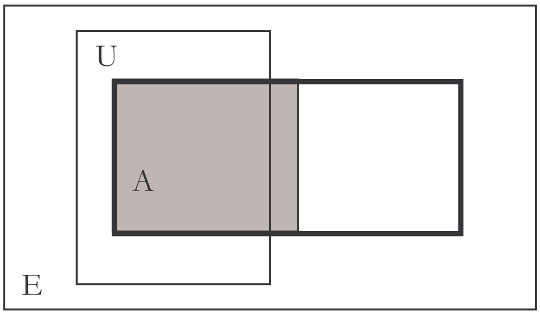
En mathématiques, on dit qu'une condition C2 est *plus faible* qu'une condition C1 lorsque l'implication C1 ⇒ C2 est vérifiée, c'est-à-dire lorsque l'inclusion $C_1 \subset C_2$ est vérifiée. On dit qu'elle est *strictement plus faible* lorsque la réciproque C2 ⇒ C1 est fausse c'est-à-dire lorsque l'inclusion est stricte.

Deux conditions A et B peuvent être équivalentes sur un sous-ensemble U sans l'être sur un ensemble E, comme l'illustre le schéma ci-dessous.



Par exemple, sur les parallélogrammes, la condition *avoir des diagonales de même longueur* est équivalente à la condition *avoir un angle droit*, alors qu'elle est fausse sur les quadrilatères.

Ceci est vrai, en particulier, dans le cas où l'une des condition implique l'autre, comme le montre le schéma ci-dessous.



Par exemple, sur les parallélogrammes la condition *avoir un angle droit* est équivalente à la condition *avoir quatre angles droits* alors que la première condition est strictement plus faible que la seconde sur les quadrilatères. Dans le problème, C2 et C1 pourraient être équivalentes dans *H*, affirmer le contraire nécessite une démonstration sur les objets mathématiques.

Par conséquent l'argument de Y n'est pas valable. Bien que la condition C2 soit *strictement plus faible* que la condition C1, elles pourraient être équivalentes sur l'ensemble *H*.

Nous faisons l'hypothèse que cet argument théorique peut paraître peu convaincant et qu'il devra être accompagné d'un contre-exemple mathématique ou tout au moins d'une représentation sous forme de patates, pour remporter l'adhésion du groupe.

2.5.2. Les conditions C1 et C2

Le terme *diagonale* peut représenter une *droite* ou un *segment* comme dans les deux définitions ci-dessous.

> *Diagonale d'un polygone : Segment de droite joignant deux sommets n'appartenant pas à un même côté.*
> *[Bouvier A., George M., Le Lionnais F., 1996]*
>
> *Diagonale : Droite qui joint deux sommets non consécutifs d'un polygone.*
> *[Le Petit Larousse, 2003]*

Or, pour étudier les conditions C1 et C2 il faut distinguer le *segment-diagonale* et la *droite support de la diagonale*.

En effet, si l'on considère dans le problème le terme *diagonale* uniquement comme un segment alors les quadrilatères concaves ne peuvent pas vérifier C2, puisque leurs *segments-diagonales* ne se coupent pas. De l'acception accordée au terme *diagonale* dépend donc l'ensemble de référence dans lequel on se place pour résoudre le problème. Suivant ce choix, on peut ou non prendre en compte les quadrilatères concaves dans le problème.

Nous choisissons, quant à nous, d'interpréter l'expression *les diagonales se coupent* par l'expression *les droites supports des diagonales se coupent*. Ainsi, l'intersection entre l'ensemble C_2 et l'ensemble des concaves est non vide. Évidemment, les milieux des diagonales ne peuvent être interprétés que comme les milieux des *segments-diagonales*, c'est pourquoi les quadrilatères croisés ne peuvent vérifier ni la condition C2 ni la condition C1. Les ensembles C_1 et C_2 sont donc inclus dans l'ensemble des quadrilatères non croisés *NC*.

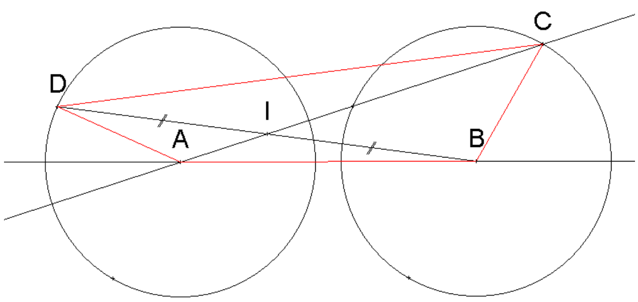
Dans l'ensemble des quadrilatères croisés, les conditions C1 et C2 sont fausses, elles sont donc logiquement équivalentes. Cependant, cette information n'est pas intéressante pour la résolution mathématique du problème. Pour étudier les implications entre C1 et C2 nous nous placerons donc dans *NC*. Le point de vue de la logique formelle n'apporte pas ici une réponse satisfaisante.

2.5.3. Implications entre C1 et C2

La phrase de X peut être traduite par:

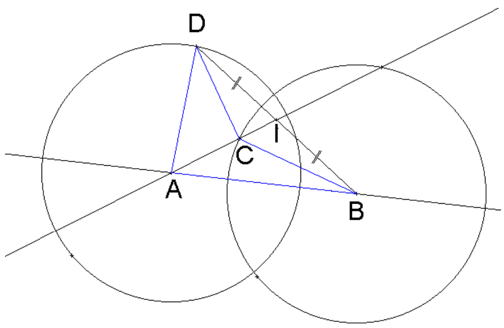
> Sous H, a-t-on C1 $\Leftrightarrow$ C2 ? ou encore [C1 et H] $\Leftrightarrow$ [C2 et H] ?

Une des implications est évidemment vraie par définition de ces conditions : C1 $\Rightarrow$ C2. Cependant, dans notre problème, même sous H, il n'y a pas équivalence entre ces propriétés. Nous proposons deux contre-exemples, c'est-à-dire des quadrilatères qui vérifient H et C2 mais pas C1, l'un convexe :



contre-exemple 1

et l'autre concave :



contre-exemple 2

2.5.4. Recherche d'un sous-ensemble de *H* sur lequel C1 $\Leftrightarrow$ C2

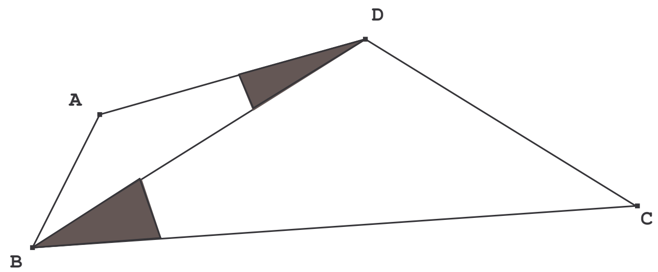
On peut alors se poser la question de savoir sur quel sous-ensemble de *H*, les conditions C1 et C2 sont équivalentes. En réalité, il s'agit de *décrire*, par des propriétés faciles à formuler, cet ensemble que nous écrivons : $H \cap (C1 \cup C2^c)$, c'est-à-dire l'intersection de l'ensemble *H* avec l'ensemble *C1* union le complémentaire de l'ensemble *C2*.

Pour cela, nous allons chercher un ensemble *B* tel que dans l'intersection de cet ensemble avec *H*, la condition C2 ne soit vraie que lorsque C1 est vraie, c'est-à-dire qu'elles soient vraies toutes les deux en même temps. Le sous-ensemble de *H* que nous avons décrit ci-dessus sera alors l'ensemble $(H \cap B) \cup (H \cap C2^c)$. L'ensemble $B = C1$, convient évidemment, car dans *C1*, l'égalité est vérifiée. Nous cherchons, en réalité *le plus grand*, au sens de l'inclusion, sous-ensemble de *H* sur lequel les deux conditions C1 et C2 sont vraies en même temps.

Nous cherchons donc un ensemble *B*, tel que l'intersection avec *H* soit la plus grande possible et qu'on ait : $H \cap B \cap C_1 = H \cap B \cap C_2$.

En termes de propriétés, nous cherchons une propriété B, la plus faible possible, telle que (H et B et C2) $\Leftrightarrow$ C1. Il faut aussi que B soit facilement exprimable.

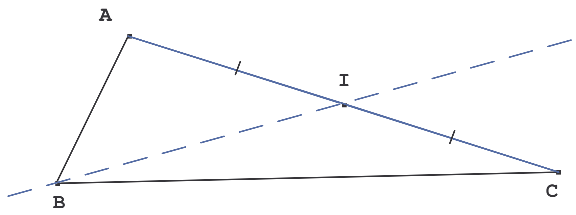
Soit ABCD un quadrilatère. Pour notre analyse, nous dirons qu'une diagonale est ***bonne*** *par rapport à deux côtés opposés* si les deux angles que le segment-diagonale forme avec ces côtés ont le même statut parmi {aigu, obtus}(un angle droit est considéré comme à la fois aigu et obtus).



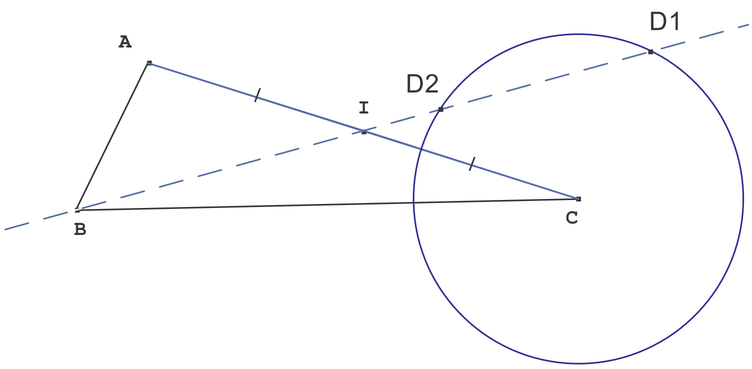
Dans l'exemple ci-dessus, la diagonale BD est *bonne par rapport aux deux côtés* AD et BC. Elle ne l'est pas par rapport aux côtés AB et DC.

Pour pouvoir faire des conjectures sur B, cherchons d'abord l'ensemble des quadrilatères vérifiant H et C2. Plaçons 3 points A, B et C.

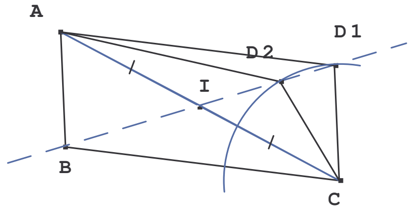
Traçons la diagonale [AC], soit I son milieu. Pour que le quadrilatère ABCD vérifie la condition C2, il faut que la deuxième diagonale (BD) coupe [AC] en son milieu I. On aura donc D $\in$ (BI).



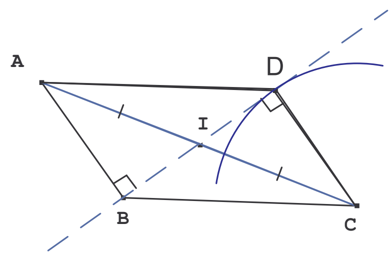
Par hypothèse, le quadrilatère ABCD vérifie H, c'est-à-dire qu'il a deux côtés égaux, prenons par exemple AB = CD. D se trouve alors à l'intersection de la droite (BI) et du cercle de centre C et de rayon AB. À partir de deux côtés adjacents on peut toujours construire un parallélogramme, ce qui, ici, garantit l'intersection du cercle et de la droite. Il y a alors deux points d'intersection D_1 et D_2 éventuellement confondus.



Si D_1 et D_2 sont distincts, on obtient un parallélogramme $ABCD_1$ et un autre quadrilatère $ABCD_2$. Si D_1 et D_2 sont confondus, on obtient un parallélogramme dont les côtés égaux sont perpendiculaires à l'une des diagonales.



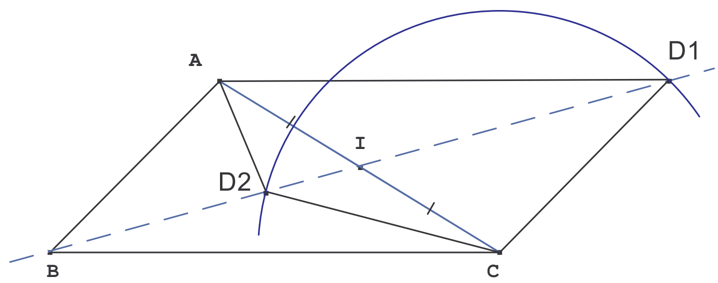
[Deux points d'intersection distincts]



[Deux points d'intersection confondus]

Lorsque le quadrilatère $ABCD_1$ est un losange, le point D2 est confondu avec le point B et le quadrilatère $ABCD_2$ est *dégénéré*. Cependant, comme il n'a qu'un segment-diagonale, nous considérons qu'il ne vérifie pas la condition C2.

Si l'on fait varier la longueurs des segments AB (ou BC) on obtient toujours deux quadrilatères dont l'un est un parallélogramme alors que l'autre peut-être convexe ou concave comme le montre l'exemple ci-dessous, [cf. contre-exemples1 et 2].



L'ensemble *B* tel que, sur $H \cap B$, C2 est vraie lorsque C1 est vraie, est donc celui qui permet d'éliminer les quadrilatères qui ne sont pas des parallélogrammes, c'est-à-dire dans nos figures précédentes les quadrilatères $ABCD_2$. Cherchons à les caractériser :

L'angle ABD_1 est égal à l'angle CD_1B. Il a donc le même statut parmi {aigu, obtus} que ce dernier. Cependant l'angle CD_2B a le statut opposé. En effet : $ABD_1 + CD_2B = 180°$ puisque le triangle D_1CD_2 est isocèle par construction.

D'après notre définition, pour tous les parallélogrammes $ABCD_1$, la diagonale BD_1 est ***bonne*** *par rapport aux côtés AB et CD_1*, alors que, pour les quadrilatères $ABCD_2$, la diagonale BD_2 ne l'est pas *par rapport aux côtés AB et CD_2*. Nous avons donc le résultat :

Un quadrilatère vérifiant nos hypothèses (H et C2) est un parallélogramme si et seulement si la diagonale qui passe par le milieu de l'autre diagonale est ***bonne*** *par rapport aux deux côtés opposés égaux.*

Autrement dit :

Soit un quadrilatère, ***l*** et ***f*** ses diagonales.

C1 : ***l*** et ***f*** se coupent en leur milieu
C2 : ***l*** passe par le milieu de ***f***

Dans un quadrilatère ayant deux côtés opposés égaux (H), la condition C1 est équivalente à la condition C2 si et seulement si la diagonale ***l*** est ***bonne*** *par rapport à ces côtés* (B) ou la condition C2 est fausse (Non C2).

Sous H, (C1 $\Leftrightarrow$ C2) $\Leftrightarrow$ (B ou Non C2)

Sous H et B, C2 est vraie lorsque C1 est vraie. Mais l'équivalence de C1 et C2 est aussi vraie dans le cas où C1 et C2 sont fausses. Or, dans ce cas, B n'est pas forcément vraie. Pour écrire cette équivalence il faut donc tenir compte du cas où C2 est fausse (Non C2), c'est pourquoi la condition s'écrit : B ou Non C2.

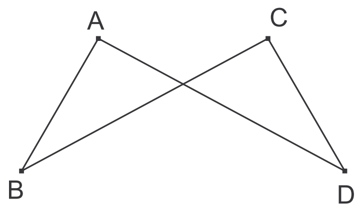
Appelons *B* l'ensemble des objets de *H* qui ont une *diagonale bonne par rapport à leurs côtés égaux*. Appelons *B'* l'ensemble des objets qui ont une *diagonale bonne par rapport à deux de leurs côtés opposés*. B est donc un sous-ensemble de H et un sous-ensemble de B', c'est un sous-ensemble strict de leur intersection qui comprend aussi les quadrilatères ayant deux côtés égaux et une diagonale *bonne par rapport aux deux autres côtés*.

Le sous-ensemble de *H* cherché est donc l'intersection de *H* avec l'union de *B* et du complémentaire de *C2* : $H \cap (B \cup C2^c)$. Comme la propriété (B ou Non C2) est nécessaire et suffisante pour que C1 soit équivalente à C2 dans *H*, *B* est bien le sous-ensemble de *H* le plus grand, au sens de l'inclusion, sur lequel on a l'équivalence.

2.5.5. Implications entre C1 et P3

La première affirmation est fausse. En effet, dans *H*, C1 n'est pas une condition nécessaire à P3. Si l'on se place dans *Q*, l'ensemble des quadrilatères, on a les équivalences[70] suivantes :

$$\text{H et P3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{être un parallélogramme} \quad \Leftrightarrow \quad \text{diagonales se coupent en leur milieu (C1)} \\ \text{ou} \\ \text{être un croisé } \textit{papillon} \end{array} \right.$$



Quadrilatère croisé *papillon* associé au trapèze isocèle

C1 n'est donc pas nécessaire pour avoir P3, le croisé *papillon* est un contre exemple, mais C1 est bien une condition suffisante pour avoir P3.

[70] Pour la démonstration de la première équivalence, le lecteur pourra se référer à l'analyse mathématique du problème de géométrie de la première séance.

En revanche, si l'on se restreint à *NC*, l'ensemble des quadrilatères non croisés, on a alors les équivalences : [H et P3] $\Leftrightarrow$ Parallélogramme $\Leftrightarrow$ C1 (diagonales se coupent en leur milieu). En conséquence, C1 et P3 sont des conditions équivalentes dans $H \cap NC$.

D'autre part, sur l'ensemble des croisés qui ne sont pas de type *papillon*, c'est-à-dire sur $\textit{Croisés} \cap \{\textit{papillon}\}^c$, il y a équivalence logique entre la condition C1 et la condition (H et P3) puisque ces deux conditions sont fausses.

2.5.6. Implications entre C2 et P3

On a toujours les implications dans Q :

$$\text{H et P3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{être un parallélogramme} \quad \Leftrightarrow \quad \text{C1} \quad \Rightarrow \quad \text{C2} \\ \text{ou} \\ \text{être un croisé } \textit{papillon} \end{cases}$$

Dans Q, C2 n'est ni nécessaire ni suffisante à la condition H et P3. Comme C2 est fausse dans les croisés, restreignons notre étude au cas des non croisés.

Dans $H \cap NC$, on a donc P3 $\Rightarrow$ C2 c'est-à-dire que C2 est une condition nécessaire pour P3. Cependant, même dans $H \cap NC$, C2 n'est pas une condition suffisante pour P3, les contre-exemples 1 et 2 précédents en sont une preuve puisqu'ils vérifient bien H et C2 mais pas P3.

Dans $H \cap NC$, pour qu'il y ait équivalence entre C2 et P3 il faut et il suffit qu'il y ait équivalence entre C1 et C2. Sur ce sous-ensemble, le problème est donc ramené à celui traité précédemment. C2 et P3 sont équivalentes sur le sous ensemble $H \cap (B \cup C2^c)$.

Ici encore, sur l'ensemble des croisés qui ne sont pas de type *papillon*, il y a équivalence logique entre la condition C2 et la condition (H et P3) puisque ces deux conditions sont fausses.

2.5.7. Conclusion

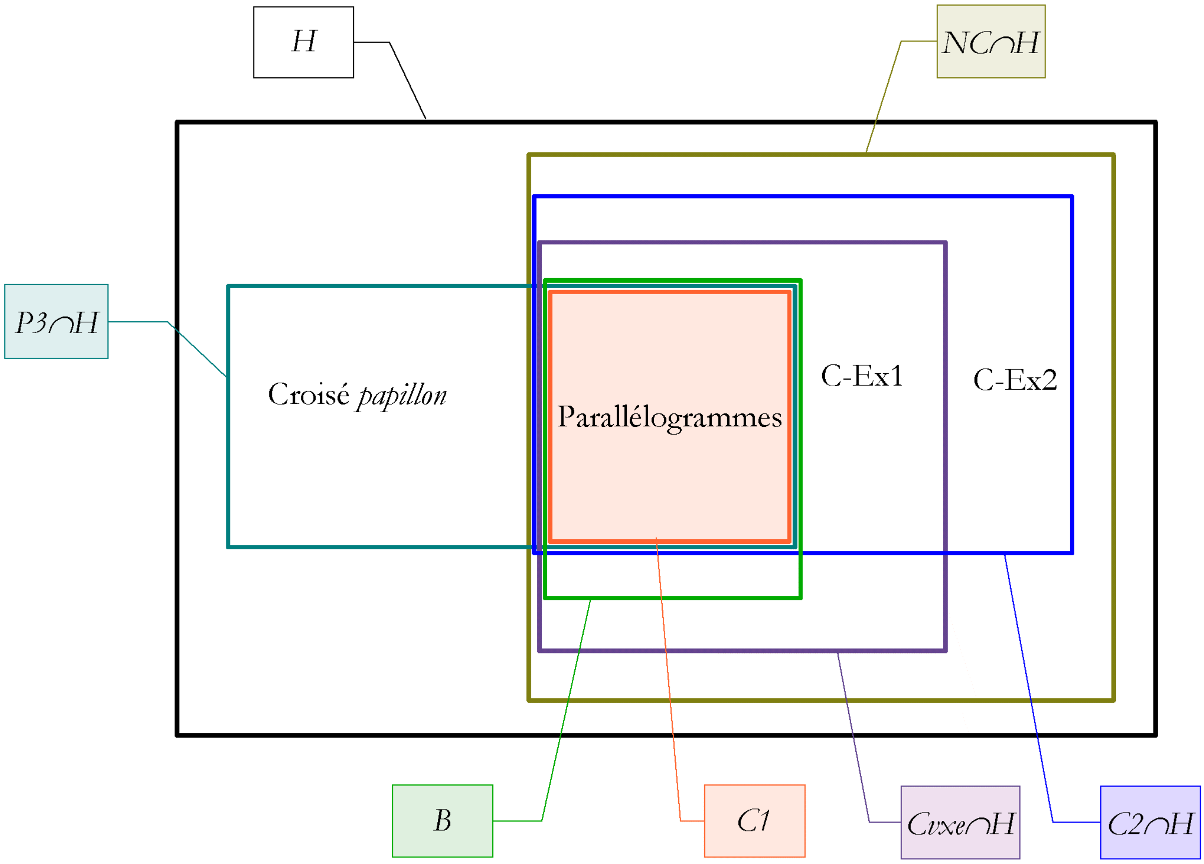
Dans *H*, P3 n'est pas équivalente à C1, mais on a l'équivalence dans *NC*.

Dans *H*, C1 n'est pas équivalente à C2 (ni dans *NC,* ni même dans *Cvxe*)

Dans *H*, P3 n'est pas équivalente à C2 (ni dans *NC,* ni même dans *Cvxe*)

Dans *B*, C1 est équivalente à C2 et P3 est équivalente à C2.

Nous représentons ci-dessous les ensembles en jeu que nous avons tous restreints à l'intérieur de *H* pour un schéma plus lisible.



2.6. Réponse aux autres questions, Stratégie 5 : Convexes

Dans cette stratégie, nous nous restreignons à l'ensemble des quadrilatères convexes. Cela nous paraît pertinent pour notre étude car les quadrilatères convexes sont les plus utilisés dans l'enseignement secondaire, les quadrilatères concaves ou croisés étant, comme nous l'avons dit, *mis de côté* comme des cas *à part*. Nous faisons donc l'hypothèse que certains stagiaires peuvent considérer cette restriction *naturelle* ou tout au moins *justifiée* par le fait que les autres cas ne sont *pas intéressants* ou ne sont que des *cas particuliers*.

2.6.1. Échange entre X et Y

Cela peut se traiter de la même façon que dans la stratégie précédente.

2.6.2. Implications entre C1 et C2

L'implication C1 $\Rightarrow$ C2 est évidemment vraie mais l'implication C2 $\Rightarrow$ C1 ne l'est pas comme le montre le contre-exemple 1 convexe (cf. stratégie précédente).

2.6.3. Implications entre C1 et P3

Dans les convexes, on a les équivalences :

H et P3 $\Leftrightarrow$ être un parallélogramme $\Leftrightarrow$ C1

Sous H, C1 est donc une condition nécessaire et suffisante à P3.

2.6.4. Implications entre C2 et P3

D'après l'équivalence précédente, l'implication (H et P3) $\Rightarrow$ C2 est vraie et C2 est une condition nécessaire à P3. Sous H, C2 n'est pas une condition suffisante pour P3 (cf. contre-exemple 1).

2.7. Les choix didactiques pour la situation *Géométrie 2*

Les valeurs des variables globales sont pour les objets, objets institutionnels mais dans une classe non institutionnelle, pour le type de tâche, analyse de preuve, pour l'organisation sociale une recherche individuelle suivie d'une recherche en petits groupes, et enfin la problématisation des trois cadres, en particulier la confrontation des cadres logique, respectivement ensembliste, avec le cadre du raisonnement déductif que nous développons ci-dessous.

2.7.1. Mise en situation des cadres logique et ensembliste

La question essentielle posée par l'échange entre X et Y est la suivante : deux propriétés d'objets dont l'une est strictement plus faible que l'autre peuvent-elles être équivalentes sur une sous-classe d'objets ? Nous faisons l'hypothèse que, pour observer d'éventuels conflits entre le cadre de la logique formelle et celui du raisonnement déductif, il faut placer cet échange dans un contexte mathématique. L'intérêt de cette question, uniquement dans un contexte logique, serait vraiment limité. Nous ne pourrions pas mesurer la mobilisation du point de vue de la logique formelle par les stagiaires ni observer une éventuelle confrontation entre les deux points de vue.

De plus, nos pré-expérimentations[71] ont montré que des connaissances de logique formelle peuvent coexister avec une conception causale sur l'implication. Placée dans un cadre logique, la résolution de ce problème pourrait recevoir l'assentiment de tous sans qu'aucune difficulté sur l'implication n'apparaisse et sans qu'aucun apprentissage ne soit possible.

Nous tenons compte du fait que le cadre mathématique amène d'autres stratégies que celles qui auraient été motivées par un cadre uniquement logique. Cependant, n'oublions pas que la question de départ, concernant H et P3, a déjà été traitée lors d'une première séance. Les difficultés dues aux objets mathématiques ne devraient donc pas interférer sur l'échange entre X et Y. De plus, la réplique de Y est complètement décontextualisée, puisqu'elle met en jeu des conditions représentées par « C1 » et « C2 ». Les conditions du problème paraissent donc appropriées pour permettre un travail sous le point de vue de la logique formelle.

2.7.2. Valeur de vérité fausse pour l'assertion de X

La proposition de X « la condition *une des diagonales coupe l'autre en son milieu* est peut-être aussi une CNS ! » est, comme nous l'avons montré, fausse. Nous faisons l'hypothèse que, pour qu'une confrontation entre le cadre de la logique formelle et celui du raisonnement déductif ait lieu et donc pour que les débats sur l'implication soient alimentés, il faut que les stratégies issues respectivement de ces deux cadres donnent des réponses contradictoires. En effet, si les deux points de vue donnent l'argument de Y pour faux, il n'y a plus de place pour des débats contradictoires.

2.7.3. Place des quadrilatères croisés

La phrase « C1 est une condition nécessaire et suffisante à P3 » n'est vraie que dans l'ensemble des quadrilatères non croisés. Nous avons choisi de la présenter comme vraie. C'est pourquoi nous distinguerons les stratégies basées sur cette affirmation et donc placées d'emblée dans les non croisés (*NC*) de celles prenant en compte l'ensemble des croisés. Nous distinguerons encore les stratégies placées dans les non croisés implicitement, par contrat, puisque, par habitude scolaire, on élimine les quadrilatères croisés. Évidemment, cette distinction ne concerne que les groupes qui feront un travail mathématique sur les propriétés.

[71] Cf. la pré-expérimentation en maîtrise présentée au chapitre 3.

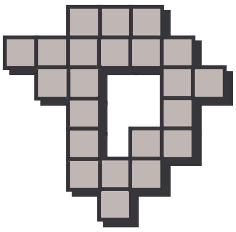
3. Situation *Polyminos 1*

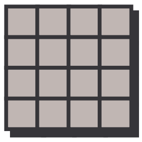
Nous ne donnerons dans cette analyse pas d'autres définitions concernant les polyminos que celles données aux stagiaires PLC2.

Rappelons le texte du problème.

Définitions :

Polymino : assemblage connexe de cases carrées dans le plan.





Domino : polymino à 2 cases.

Taille d'un polymino : nombre de cases du polymino.

Pair : un polymino est pair si sa taille est paire.

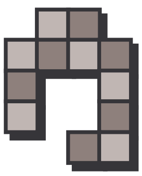
Paver un polymino par des dominos : recouvrir entièrement et sans chevauchement un polymino à l'aide de dominos.

Dans ce cas-là, on dira qu'un polymino est **pavable** par des dominos.

pavable

Non pavable

Équilibré : Si l'on colorie le polymino en damier, il est dit équilibré lorsque le nombre de cases blanches est égal au nombre de cases noires.



Question :

Soit P1, P2 et P3 les propriétés suivantes d'un polymino :

(P1) : pavable (par des dominos)

(P2) : équilibré

(P3) : pair

Quelles sont les relations entre ces propriétés ?

Rédigez une preuve satisfaisant tout le groupe.

3.1. Type de tâche et questionnement

La tâche consiste à décider de la validité ou non d'implications entre propriétés concernant le pavage de polyminos. Cette situation est construite à partir du problème général de pavage des polyminos par d'autres polyminos. Les nombreuses expérimentations de notre équipe [Grenier D., Payan C., 1998 & 2003] portent habituellement sur le problème général réduit à une classe spécifique de polyminos à paver, les polyminos carrés avec un trou, et une classe spécifique de polyminos avec lesquels on pave, les dominos. Nous avons fait le choix de proposer, ici, une situation beaucoup plus fermée. Ce choix est motivé par le fait que ces précédentes expérimentations ont montré que les réponses étaient très longues à « sortir » alors que nous n'avions que peu de temps pour notre situation avec les PLC2. En particulier, nous avons choisi de montrer la coloration, par le biais de la propriété *équilibré*, alors que cet outil n'émerge généralement qu'après un long temps.

Nous avons proposé cette situation *Polymino* car nous faisons l'hypothèse que les preuves dans ce contexte sont différentes des preuves dans le contexte de la géométrie, cela sera détaillé dans le § sur les différences entre les deux situations. En effet, les objets et les propriétés en jeu dans le pavage de polyminos ne sont pas connues des PLC2. En conséquence, nous faisons l'hypothèse que pour résoudre le problème, ils vont devoir faire des essais de pavages, émettre des conjectures et les prouver ou les invalider. D'autre part, la question de départ laisse la possibilité de regarder s'il y a des sous-classes dans lesquelles il y a des équivalences. Nous prévoyons d'ailleurs d'élargir le problème dans ce sens si certains groupes terminent avant les autres. Pour ces raisons, nous faisons l'hypothèse que le cadre ensembliste est un outil nécessaire pour résoudre ce problème. Notre question principale est de savoir si, face à des propriétés non connues, les PLC2 vont mettre en place des caractéristiques de résolutions différentes.

Cependant, le caractère fermé de notre situation nous oblige à prendre en compte d'éventuels *effets de contrat*. En effet, notre situation sera a priori interprétée comme ayant des implications vraies. C'est pourquoi, après avoir montré qu'une implication est fausse, nous faisons l'hypothèse que les PLC2 conjecturerons que sa réciproque est vraie.

Nous donnerons, pour chaque question, une démonstration mathématique dans le cadre déductif et nous détaillerons quelques aspects de ce que nous appellerons une *stratégie par essais et conjectures*. Les objets n'étant pas institutionnels, de précédentes expérimentations [Grenier D., Payan C., 1998 & 2003] ont montré que l'une et l'autres sont présentes et nécessaires pour la résolution. La *stratégie par essais et conjectures* est le moyen de « rentrer » dans le problème et la démonstration dans le cadre déductif est le moyen satisfaisant de rendre publique la réponse pour la plupart des étudiants. Nous écrirons la démonstration avant de donner, d'après les précédentes expérimentations, quelques hypothèses sur ce qui est susceptible d'avoir lieu en termes de contre-exemples et de conjectures.

Dans la suite nous faisons le choix d'écrire les implications sans quantificateurs bien qu'ils soient évidemment sous-entendus. Par exemple, nous écrirons « pavable ⇒ pair » pour « quel que soit le polymino P, P est pavable ⇒ P est pair ». Ce choix est motivé par le fait que les implications paraissent alors beaucoup plus simples à lire et le fait, qu'une fois explicité, il ne porte plus à confusion.

3.2. Démonstration dans le cadre déductif

3.2.1. Implications entre *pavable* (P1) et *pair* (P3)

L'implication *pavable* ⇒ *pair* (P1 ⇒ P3) est vraie. En effet, un polymino pavable est, par définition, recouvert sans chevauchement par des dominos. Or un domino recouvre deux cases. En conséquence, le nombre de cases du polymino, c'est-à-dire sa taille, est un nombre pair.

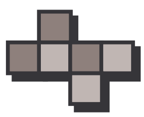
L'implication *pair* ⇒ *pavable* (P3 ⇒ P1) est fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous qui est pair et non pavable.

contre-exemple 1

3.2.2. Implications entre *pavable* (P1) et *équilibré* (P2)

L'implication *pavable* ⇒ *équilibré* (P1 ⇒ P2) est vraie. En effet, supposons que le polymino soit colorié comme un échiquier, alors un domino posé sur ce polymino couvre une case blanche et une case noire. Et ceci est vérifié, que le domino soit placé horizontalement ou verticalement. De plus, un polymino pavable, par définition, peut être recouvert sans chevauchement par des dominos. Il s'ensuit qu'un polymino pavable a le même nombre de cases blanches que de cases noires, c'est-à-dire qu'il est équilibré.

L'implication *équilibré* ⇒ *pavable* (P2 ⇒ P1) est fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous qui est équilibré mais non pavable.



contre-exemple 2

3.2.3. Implications entre *équilibré* (P2) et *pair* (P3)

L'implication *équilibré* ⇒ *pair* (P2 ⇒ P3) est vraie. Puisque le polymino est équilibré, il contient le même nombre N de cases noires et de cases blanches. Par suite, la taille du polymino est 2N et le polymino est pair.

L'implication *pair* ⇒ *équilibré* (P3 ⇒ P2) est fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous qui est pair mais non équilibré.

contre-exemple 1

3.3. Stratégie par essais, conjectures et contre-exemples

Les propriétés pavables et non pavables n'étant pas connues, pour « rentrer » dans le problème, on fait des essais de pavages. Les essais se font souvent sur des petits cas, c'est-à-dire sur des polyminos de petite taille, mais pas toujours, et, comme nous l'avons vu lors de précédentes expérimentations[72], l'utilisation des petits cas est souvent une marque de l'habitude du raisonnement mathématique[73]. Ces exemples amènent à formuler des conjectures que l'on essaie de prouver[74], en construisant un contre-exemple lorsque l'implication est fausse ou par l'utilisation de propriétés lorsque l'implication est vraie.

De précédentes expérimentations ont montré que les conjectures, exemples et contre-exemples sont au cœur de l'activité de pavage de polyminos, nous faisons deux hypothèses pour expliquer ceci. La première hypothèse est que, les exemples et contre-exemples étant accessibles très facilement, ils ont plus de chances d'être des outils pour émettre des conjectures et éventuellement les réfuter. Notre seconde hypothèse est basée sur une caractéristique de ces objets de mathématiques discrètes : il n'y a pas de continuité entre les objets. C'est d'ailleurs une caractéristique de notre situation Polyminos par rapport à des situations usuelles de géométrie.

[72] La situation des polyminos a été expérimentée sous la forme générale de nombreuses fois au sein de notre équipe, du primaire à la fin de l'université, en passant par la formation continue des professeurs et la vulgarisation scientifique. Nos hypothèses se nourrissent de toutes ces expérimentations.

[73] Nous avons vu, par exemple, lors d'une formation continue des professeurs des écoles à l'IUFM de Bretagne, des professeurs des écoles se lancer dès le départ sur des polyminos carrés de côtés 6 ou 8. Ils justifient cela en affirmant qu'on ne peut pas travailler sur un carré de côté 3 car c'est un cas particulier !

[74] Cette nécessité de prouver n'est pas toujours présente, dans la même formation continue à l'IUFM de Bretagne, certains professeurs des écoles, ayant montré ce qui se passait sur quelques cas, ont donné une conclusion générale en justifiant par « on en déduit donc ». Notre public étant expérimenté en mathématiques, nous faisons l'hypothèse qu'ils ressentirons la nécessité de prouver les conjectures.

Les polyminos dessinés sont toujours particuliers, par exemple, il n'y a pas de « bon représentant » des polyminos pavables (resp. polyminos équilibrés, pairs…) qui puisse être qualifié de polymino pavable *quelconque*. On ne peut pas avoir un *représentant générique* des polyminos pavables, comme on peut en avoir un des parallélogrammes. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que cela favorise l'utilisation du cadre ensembliste et qu'ainsi l'activité doit nécessairement être centrée sur la recherche d'exemples, contre-exemples et conjectures.

Nous présentons ici, ce que nous avons vu habituellement se passer dans nos précédentes expérimentations, cela nous permet de faire quelques hypothèses sur ce qui est susceptible d'émerger dans notre situation.

3.3.1. Implications entre *pavable* (P1) et *pair* (P3)

Les essais de pavages montrent en général assez vite qu'être *pair* est une condition *nécessaire* pour être *pavable*. En réalité, l'implication montrée est le plus souvent « Non *pair* ⇒ Non *pavable* », il faut alors utiliser l'équivalence de l'implication avec sa contraposée pour en déduire que « *pavable* ⇒ *pair* ». Il arrive que cette implication soit démontrée directement sans l'aide d'aucun essai. Cependant, cette implication n'est pas *évidente*, nous voyons parfois certaines personnes essayer de paver un polymino impair et, alors qu'il ne leur reste qu'une seule case non pavée, réessayer un autre pavage pour voir si ça marche autrement.

La conjecture que les propriétés *pavable* (P1) et *pair* (P3) sont équivalentes est très courante au moins au début. Elle est d'ailleurs vraie, par exemple, sur l'ensemble des polyminos rectangles. Il faut donc trouver un contre-exemple pour prouver qu'elle est fausse.

3.3.2. Implications entre *pavable* (P1) et *équilibré* (P2)

Dans les essais, lorsqu'on n'arrive pas à paver un polymino pair, on remarque qu'il reste toujours 2 cases non contiguës non pavées. Cela ne prouve pas que le polymino ne soit pas pavable, il pourrait exister un autre pavage. Il faut remarquer que les deux cases restantes sont de la même couleur et transformer la *coloration* en outil, pour formuler la conjecture que « Non *équilibré* ⇒ Non *pavable* ». La démonstration de l'implication directe se fait en utilisant le fait qu'un domino recouvre une case blanche et une case noire. L'outil coloration n'est pas un outil habituel, il est même rarement reconnu comme un outil mathématique.

La conjecture de l'équivalence entre les deux propriétés est assez courante, au moins au début. Pour construire un contre-exemple à « *équilibré* ⇒ *pavable* », il faut prendre un point de vue ensembliste. En effet, lors de la construction du contre-exemple, il faut se placer dans la classe des *polyminos équilibrés*, et pour garantir que l'on y reste lorsque l'on agrandit le polymino, il faut ajouter autant de cases blanches que de cases noires à chaque étape.

3.3.3. Implications entre *équilibré* (P2) et *pair* (P3)

L'implication « *équilibré* ⇒ *pair* » est démontrée, en général, à partir de la définition de équilibré (autant de cases noires que de cases blanches) et ne nécessite pas d'essais.

Le contre-exemple à l'implication réciproque est trouvé, le plus souvent, très rapidement.

3.4. Les choix didactiques pour la situation *Polyminos 1*

3.4.1. Présentation de la coloration

En choisissant de définir la propriété *être un polymino équilibré*, nous avons dévoilé une partie de l'outil coloration. Ce choix est motivé par le fait que de nombreuses expérimentations, notamment en DEUG [Grenier, Payan, 1998 & 2003] et [Rolland, 1999], ont montré qu'il fallait beaucoup de temps pour que cet outil soit utilisé. Or, notre expérimentation était limitée par le temps. Cependant, ces mêmes expérimentations ont montré que, même lorsque la coloration est utilisée, sa reconnaissance en tant qu'outil mathématique est longue et difficile à obtenir. Nous faisons donc l'hypothèse que, bien que nous ayons défini la *coloration d'un polymino*, l'outil coloration est loin d'être devenu un outil appartenant aux connaissances des PLC2.

3.4.2. Formulation de la question

L'énoncé ne dit pas quelles sont les implications vraies et, a priori, rien ne permet de le savoir. Il y a donc un enjeu de vérité réel. Pour répondre il faut faire des conjectures et chercher des contre-exemples. Toutefois, n'oublions pas les *effets de contrats didactique* possibles dont nous avons parlé dans l'introduction, il est possible qu'ayant trouvé une implication fausse les PLC2 fassent la conjecture que sa réciproque est vraie simplement par effet de contrat.

3.4.3. Les implications ne sont pas des équivalences

Toutes les implications vraies, ici, ont des réciproques fausses. Il n'y a pas d'équivalences. Cela oblige à faire la distinction entre les conditions nécessaires et les conditions suffisantes. Or nous avons montré combien cela était essentiel pour problématiser l'implication.

4. Situation *Polyminos 2*

Ce problème est posé dans la deuxième séance, c'est-à-dire une semaine après le premier problème. Lors de la séance précédente, les étudiants ont tous démontré que l'implication P1 ⇒ P2 est vraie et que l'implication P2 ⇒ P1 est fausse.

Rappelons le texte du second problème sur les polyminos.

> Reprenons les propriétés d'un polymino définies dans le premier problème :
>
> P1 : *pavable* et P2 : *équilibré*.
>
> 1 - On examine l'implication P1 ⇒ P2.
>
> Voici une preuve proposée par certains et refusée par d'autres :
>
> *Un domino couvre une case blanche et une case noire. Si un polymino est pavable, il est recouvert par k dominos et ces k dominos recouvrent k cases blanches et k cases noires, donc il est équilibré.*
>
> Donnez votre avis sur cette preuve.
>
> Auriez-vous une réponse différente en tant que mathématicien et en tant qu'enseignant ?
>
> 2- On examine l'implication P2 ⇒ P1.
>
> Voici une preuve proposée :
>
> *Dans un polymino équilibré de 2n cases, il existe 2 cases voisines : ces deux cases sont de couleurs différentes et correspondent à un domino. On retire ce domino. On obtient alors un polymino équilibré de taille 2(n-1). En réitérant ce procédé, on arrive à un polymino équilibré à deux cases. Ceci démontre que le polymino était pavable.*
>
> Donnez votre avis sur cette preuve.
>
> Justifiez

4.1. Type de tâche et questionnement

La tâche proposée consiste en l'analyse de preuves écrites concernant le pavage de polyminos, la validation ou non de ces preuves et la justification. Ces deux preuves portent sur des objets déjà manipulés et sur des arguments qui ont été utilisés lors de la première séance.

Par ces questions nous voulons permettre un retour sur certains contenus mathématiques ou sur certains arguments qui avaient suscité des discussions dans la précédente séance ou que nous avons vu apparaître dans d'autres expérimentations, en particulier, la coloration et la récurrence.

La tâche est à deux niveaux, le premier portant sur la validité des preuves d'un point de vue mathématique alors que le second porte sur la recevabilité d'une preuve dans un groupe social. Cela doit permettre un débat sur le statut de la preuve, sur la différence entre validité et recevabilité. Comment reconnaître qu'un discours est une preuve ? Quels sont les critères pour accepter une preuve ? Quels moyens se donnent-ils pour valider ou invalider une preuve ? Les critères de recevabilité d'une preuve sont-ils différents pour les professeurs du secondaire et pour les mathématiciens?

Les tâches concernant les deux preuves sont différentes. Sur la première preuve, ils savent que l'implication, et même pour certains la preuve est juste, le travail se fait plus sur la forme et la recevabilité de la preuve. Pour la deuxième preuve, ils savent que l'implication est fausse, elle n'est donc ni valide ni recevable, il y a un travail mathématique à faire pour trouver où pèche la démonstration. Il nous paraît plus pertinent, cette fois, de détailler question par question car, dans cette situation *Géométrie 2*, il n'y a pas de continuité entre les stratégies d'une question sur l'autre. Nous proposerons pour chaque sous-tâche plusieurs réponses.

4.2. Sous-tâche de la question 1

Nous détaillons deux réponses l'une portant sur la validité de la preuve alors que la seconde porte sur la recevabilité. Cependant, dans la réponse 2, la preuve peut-être refusée sans qu'il soit dit explicitement que la cause est qu'elle n'est pas recevable. La distinction entre validité et de recevabilité n'est pas toujours explicite. La frontière entre validité et recevabilité n'est pas toujours claire et ceci d'autant plus que le caractère recevable d'une preuve dépend de chacun. Le plus facile est de s'accorder sur une preuve non valide, une preuve valide pouvant ne pas être reconnue valide en raison de son caractère irrecevable pour la personne la jugeant.

4.2.1. Réponse 1 : *validité de la preuve* (réponse correcte)

L'implication *pavable* $\Rightarrow$ *équilibré* est vraie, c'est-à-dire qu'elle est vérifiée par tous les polyminos, de plus la preuve proposée est mathématiquement valide. Cette preuve utilise l'outil *coloration*.

4.2.2. Réponse 2 : *recevabilité de la preuve* (réponse pour nous incorrecte)

Cette démonstration n'est pas recevable.

Nous proposons deux causes principales au refus de cette preuve que nous avons vues apparaître lors d'expérimentations et lors de la première séance.

- la forme et la syntaxe : *cette démonstration n'est pas rigoureuse*
- un implicite mathématique : *le polymino peut-il être colorié ?*

Plusieurs arguments sous-tendent le manque de rigueur de la démonstration. D'une part, la non formalisation de la *structure du discours*. L'absence de connecteurs faisant apparaître le pas ternaire (on sait que, or, donc...) rend plus difficile l'identification du raisonnement déductif sous-jacent. D'autre part, la non formalisation des *objets du discours*. Par exemple, le statut de k n'est pas défini, ce qui est contraire aux usages dans l'enseignement des démonstrations en mathématiques.

D'autre part, l'outil coloration, bien qu'il ait été présenté aux étudiants lors de la première séance, par le biais de la propriété « équilibré », n'est pas un outil qu'ils manipulent facilement. Cela peut faire surgir des questions « parasites » à la résolution de cette tâche : « Que se passe-t-il si on colorie autrement ? », « Si le polymino est colorié et si les dominos sont aussi coloriés, comment être sûr que les colorations vont se correspondre ?

Ces questions sont liées à un implicite mathématique de la preuve. En effet, on ne prouve pas qu'un polymino peut réellement être colorié en damier et que toute les colorations (bicolores) sont identiques (en bijection). En fait ce « trou » dans la démonstration peut être rempli facilement, il suffit de dire qu'un polymino peut être découpé dans un damier. Mais la question est alors reculée, peut-on colorier une grille en damier ? Cette question n'est pas triviale puisque tous les objets ne peuvent être coloriés en damier. Cependant, nous faisons l'hypothèse que l'on peut se convaincre facilement qu'une grille peut être coloriée en damier. Il y a bien un « trou » dans la preuve mais qui nous paraît facile à accepter d'autant plus que nous avons défini la coloration d'un polymino. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'ils ne prendront pas la possibilité ou non de cette coloration à leur charge.

Dans l'enseignement on peut distinguer deux types d'implicites, ceux qui relèvent des connaissances déjà acquises et ceux sur lesquels on s'accorde pour dire que « ça marche » car il serait lourd et fastidieux de les démontrer alors qu'il sont facilement « visibles ». L'implicite de la coloration fait partie du deuxième type. Les PLC2 ont l'habitude d'accepter de tels implicites en géométrie classique mais, ici, la nouveauté des objets et des propriétés peut les amener à s'interroger différemment.

Nous tenons la position que cette preuve, à la fois compréhensible par des élèves, puisque l'implicite ne concerne pas une propriété de haut niveau ou un raisonnement difficile, et pas redondante pour un mathématicien, est tout à fait recevable.

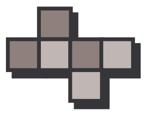
4.3. Sous-tâche de la question 2

Les PLC2 ont démontré que l'implication *équilibré* ⇒ *pavable* est fausse à la séance précédente, mais ce résultat n'a pas été institutionnalisé. On peut donc se demander si une preuve qui paraît convaincante peut remettre en cause la validation de l'implication. Cependant, nous faisons l'hypothèse que cela n'aura pas lieu car ils ont tous démontré que l'implication était fausse en trouvant un contre-exemple. Ce contre-exemple qu'ils ont trouvé eux-mêmes, s'il n'empêche pas toujours de trouver la preuve convaincante, empêche au moins de rediscuter de la validité de l'implication.

Nous proposons trois réponses suivant que l'on s'intéresse uniquement à la question de la validité de la preuve ou que l'on cherche à montrer pourquoi elle n'est pas valide. Cette liste de réponses n'est pas exhaustive mais nous faisons l'hypothèse que ce sont les plus susceptibles d'émerger. Le type de la première justification est différent du type de justification des réponses 2 et 3. La première réponse rejette la preuve puisqu'elle donne un résultat faux alors que les deux autres rejettent la preuve parce qu'elle met en œuvre une propriété fausse (connexité) ou du moins considérée comme telle (récurrence descendante).

4.3.1. Réponse 1 : *Validité de la preuve* (réponse correcte)

L'implication *équilibré* ⇒ *pavable* est fausse, c'est-à-dire qu'il existe un polymino pour lequel elle n'est pas vérifiée. En effet, le polymino ci-dessous en est un contre-exemple.



contre-exemple 1

La preuve proposée est donc fausse.

4.3.2. Réponse 2 : *la preuve ne garantit pas la connexité* (réponse correcte)

La preuve proposée dans l'énoncé du problème est fausse car, en enlevant un domino, on sort de l'ensemble des polyminos. En effet, un polymino est connexe par arêtes, or lorsque l'on enlève un domino quelconque cette connexité n'est pas garantie et l'on n'obtient pas forcément un polymino. Par exemple, dans le polymino ci-dessous, si je choisis d'enlever le domino du milieu je n'aurai plus un polymino mais deux polyminos distincts. Ce polymino est donc un contre-exemple à la preuve.

contre-exemple 2

En outre, même en choisissant le domino que l'on enlève, la connexité n'est pas assurée. Comme le montre le contre-exemple 1 qui est un contre-exemple au résultat et donc à la preuve : quel que soit le domino que l'on retire, on ne peut pas obtenir un polymino. Cette preuve ne pourrait donc pas être rendue correcte même en choisissant le domino à retirer.

4.3.3. Réponse 3 : *la récurrence descendante n'est pas un outil* (réponse incorrecte)

La preuve est fausse car la *récurrence descendante* n'est pas un outil mathématique reconnu.

En effet, l'outil essentiel utilisé implicitement pour cette preuve est la *récurrence (descendante*[75]*)*. On utilise la propriété que dans certains ensembles ordonnés il n'existe pas de chaîne descendante infinie. Ici on considère la taille du polymino à paver qui ne peut décroître indéfiniment. En réalité, ce n'est pas l'outil *récurrence descendante* qui doit être mis en cause mais plutôt son utilisation dans cette preuve.

Cependant, la *preuve par récurrence descendante* n'est généralement pas un objet d'enseignement ni dans le secondaire ni à l'université et même son utilisation n'est pas courante dans l'enseignement supérieur [Grenier, Payan, 1998 & 2003], [Rolland, 1999]. Par conséquent, ce mode de raisonnement ne fait probablement pas partie des connaissances des PLC2. Nous attendons donc des difficultés, des erreurs ou au moins des discussions liées à la récurrence descendante, par exemple des questions déjà entendues lors de préexpérimentations : « Peut-on enlever le domino n'importe où ? », « Peut-on arriver à choisir le domino à enlever de telle sorte que l'objet que l'on obtient soit un polymino, c'est-à-dire tel que la connexité soit garantie ? ».

4.3.4. Réponse 3 : *la preuve est correcte* (réponse incorrecte)

La preuve est correcte pour la raison que toutes les phrases sont tenues pour vrai, et que le passage de l'une à l'autre est justifié.

4.3.5. Quelques hypothèses sur l'apparition des différentes réponses

Notre première hypothèse est que la troisième justification, bien que quelquefois rencontrée en cours de DEUG scientifique [Avitsis A., 1996] a peu de chances d'apparaître avec ce public de PLC2.

D'autre part, nous faisons l'hypothèse que la deuxième réponse, éventuellement ajoutée à la première, va être prépondérante. En effet, notre hypothèse est qu'ils vont chercher où se trouve l'erreur et ceci pour deux raisons. La première due au contrat didactique, puisque la validité de cette implication a déjà été traitée c'est que la tâche que nous leur proposons se situe à un autre niveau, il y a « quelque chose d'autre » à faire. La seconde raison que l'on peut évoquer est liée à

[75] Nous ne donnons pas à l'expression « récurrence descendante » le même sens que le dictionnaire [Bouvier, George, Le lionnais, 1996], c'est pourquoi nous décrivons en quelques mots ce que nous voulons dire.

leur métier d'enseignant, un professeur ne se contente en général pas de dire qu'une preuve est fausse, pour aider l'élève, il cherche où se situe l'erreur.

4.4. Les choix didactiques pour la situation *Polyminos 2*

4.4.1. Nature du couple (résultat, preuve)

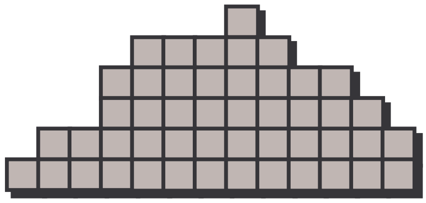
Le couple (résultat, preuve) peut prendre les valeurs (V, V), (V, F), (F, V) ou encore (F, F). Le couple (F, V) ne devrait pas avoir sa place en mathématiques, mais il n'est pas rare de voir des étudiants affirmer qu'un résultat est faux et que la preuve qui l'amène est juste. Nous avons proposé des couples qui vérifient (V, V) pour la première preuve et (F, F) pour la seconde, ce choix s'est fait en fonction de la séance précédente et d'autres expérimentations sur les polyminos. Il y a matière à discussion car cette *nature* des couples n'est pas toujours reconnue.

Dans le cas de la première sous-tâche (V, V), le résultat étant connu, la preuve n'est pas toujours reconnue valide [Grenier, Payan, 1998 & 2003] comme nous l'avons montré dans la deuxième stratégie. La nature supposée du couple serait alors (V, F).

Dans le cas de la seconde sous-tâche (F, F), la preuve peut être, par exemple, acceptée comme valide ou encore réfutée par des arguments faux [Grenier, Payan, 1998 & 2003]. Par exemple, la seconde preuve peut être acceptée par oubli de l'argument de connexité. Elle peut, d'autre part, être réfutée en raison de l'utilisation de l'outil *récurrence descendante*. Cependant, l'existence d'un contre-exemple simple favorise le rejet de la preuve sans qu'il y ait discussion sur la récurrence descendante. Le choix d'un couple (V, F) aurait peut-être été plus pertinent mais notre choix a été motivé, comme nous l'avons dit par la précédente séance.

4.4.2. Choix du polymino à paver pour la deuxième sous-tâche

L'implication proposée « équilibré $\Rightarrow$ pavable » est vraie sur la classe des polyminos trapézinos. *Un trapézino est un polymino formé d'un empilement de lignes, la base de chaque ligne étant incluse (pas nécessairement strictement) dans la ligne « précédente »* [Rolland J., 1998, p. 242]. En voici un exemple.



On peut démontrer que l'implication P2 ⇒ P1 est vraie dans les trapézinos, cependant la démonstration proposée est toujours fausse pour la même raison de connexité non garantie. Toutefois, dans ce cas, la preuve peut être améliorée et rendue correcte en imposant le choix du domino à retirer. Il existe, en effet, un algorithme (non trivial) qui permet de trouver un domino que l'on peut enlever tout en garantissant qu'on reste dans la classe des trapèzes.

Nous faisons donc l'hypothèse que cette preuve aurait été plus féconde en débats, notamment parce qu'il n'existe pas de contre-exemple dans le cas des trapézinos et que la stratégie aurait été bloquée.

Cependant, nous avons choisi de rester dans les objets sur lesquels ils ont travaillé la semaine précédente, d'abord dans un désir d'unité pour la situation, et ensuite pour leur permettre de travailler sur une implication dont ils connaissent la validité.

4.4.3. Distinction professeur / mathématicien

Nous faisons l'hypothèse que leur avis sur la validité d'une preuve en tant que professeur peut être différent de celui qu'ils ont en tant que mathématicien. Nous proposons cette question non seulement pour légitimer, face à ces nouveaux professeurs, les situations proposés mais aussi pour nourrir les débats sur la validation et la recevabilité des preuves. Il s'agit, en effet, de « recevabilité » d'une preuve car ici ce n'est pas seulement la validité de la preuve qui est en jeu, mais bien le niveau d'explicitation, de rédaction que l'on peut accepter suivant que la preuve vient d'un élève ou d'un pair.

Nous attendons donc des débats : faut-il améliorer la preuve ? si oui quelle(s) phrase(s) faut-il changer ? est-elle irrecevable ? dans ce cas, quelle est la justification donnée : manque de rigueur ? incompréhension ? erreurs ? pas de justification ?

Certains professeurs stagiaires étant en lycée alors que d'autres sont en collège, les critères de recevabilité peuvent varier. Pour notre part, nous tenons la position qu'il n'y a pas de différence entre la position d'un professeur et celle d'un mathématicien.

5. Intérêt de la confrontation des situations *Géométrie* et *Polyminos*

5.1. Analogies entre les situations *Géométrie* et *Polyminos*

5.1.1. Les objets mathématiques sont facilement manipulables

Notre hypothèse est que, pour qu'un apprentissage puisse se faire sur l'implication, il faut que le travail se fasse sur le raisonnement et la preuve. D'autre part pour qu'on puisse repérer des erreurs dues à l'implication, nous devons nous donner les moyens de contrôler que ces erreurs ne sont pas dues à des concepts mathématiques.

Pour cela, il faut que les concepts mathématiques en jeu n'apportent pas, par eux-mêmes, de difficultés. Il faut que les premières propriétés et les techniques liées à ces concepts soient maîtrisées, en sorte qu'il n'y ait pas d'erreurs dues aux concepts mathématiques qui puissent « interférer » avec des erreurs de raisonnement. Les objets que nous proposons dans ces situations ont donc été choisis pour satisfaire ce critère. Les *polyminos* sont des objets nouveaux pour les PLC2 mais facilement et rapidement appréhensibles. Comme l'ont montré de précédentes expérimentations [Grenier D., Payan C., 1998 & 2003] [Rolland J., 1999], ces objets sont faciles d'accès quel que soit le niveau mathématique des apprenants. Les objets mathématiques en jeu dans notre problème de géométrie sont, quant à eux, depuis longtemps connus et utilisés par les PLC2. De plus, dans le cadre de leur formation les stagiaires ont acquis du « recul » par rapport à ces objets qu'ils enseignent ou qu'ils seront susceptibles d'enseigner prochainement. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que ces objets permettent un travail sur le raisonnement.

5.1.2. Les classes d'objets en jeu ne sont pas des classes institutionnalisées

Dans nos deux problèmes, les classes d'objets en jeu ne sont pas des classes d'objets institutionnalisées. Les polyminos ne sont pas des objets connus et les quadrilatères de la classe *H* du problème de géométrie, *les quadrilatères ayant deux côtés opposés égaux*, n'en sont pas non plus. Contrairement aux parallélogrammes dont les propriétés sont bien établies à partir de la quatrième, les propriétés et les théorèmes associés aux objets en jeu dans nos problèmes ne sont pas familières. Nous faisons l'hypothèse que ceci rend l'utilisation du point de vue ensembliste nécessaire ou tout au moins économique. Il n'est plus possible de penser les propriétés comme des qualités d'objets, il faut considérer les ensembles qui leurs sont associés.

5.1.3. Enjeu de découverte, enjeu de vérité : conjectures, exemples, contre-exemples

Dans les deux problèmes, les objets mathématiques étant *faciles d'accès*, c'est la question, elle-même, qui nécessite une activité mathématique. Ces questions paraissent inhabituelles puisqu'il faut « trouver les conditions telles que… » ou discuter de la véracité (non évidente) d'implications données alors que l'enseignement traditionnel propose le plus souvent des problèmes de la forme « Montrez que …» le résultat proposé étant souvent *évident*. Dans le problème de géométrie, il y a un *enjeu de découverte*, on ne connaît pas d'avance le résultat qu'on va obtenir, il faut *découvrir* les propriétés des diagonales.

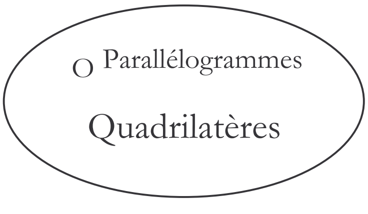
Pour les deux problèmes, l'activité mathématique est faite d'essais, d'expériences (configurations géométriques connues, essais sur des petits polyminos), de conjectures, d'exemples et de contre-exemples. C'est la résolution du problème qui nécessite cette activité mathématique et non pas une demande extérieure (professeur ou questions intermédiaires). *L'enjeu de vérité* est réel dans ces problèmes et nous faisons l'hypothèse que cela facilite le passage au point de vue ensembliste puisque le point de vue déductif n'est plus alors suffisant.

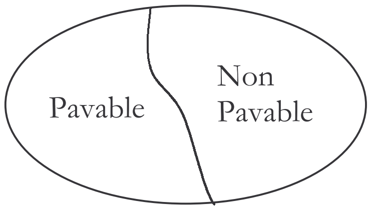
5.2. Différences entre les situations Géométrie et Polyminos

5.2.1. Propriétés remarquables

Nous dirons qu'une propriété est *remarquable* si elle est associée à un ensemble de *mesure petite*. Cette définition est évidemment vague mais nous l'utiliserons surtout dans la comparaison de deux propriétés. Par exemple, *être un parallélogramme* est une propriété très *remarquable* puisque l'ensemble des parallélogrammes est de mesure nulle dans l'ensemble des quadrilatères. En effet, un parallélogramme est déterminé par trois points A, B, C, le quatrième point étant déterminé par les trois autres. À ces trois points, on peut associer une infinité de quadrilatères ABCE, E décrivant le plan. Réciproquement soit un quadrilatère ABCD, on ne peut lui associer que quatre parallélogrammes déterminés par les trois points ABC, ABD, ACD ou BCD.

Au contraire, dans l'ensemble des polyminos, il n'y a pas de propriétés *remarquables*. Par exemple, les deux propriétés *être pavable* ou *être non pavable* ont des mesures de grandeurs comparables.





Les propriétés *remarquables* sont au cœur de la géométrie scolaire, puisqu'on y met en valeur des ensembles d'objets de mesures petites. Comme nous l'avons déjà dit, on ne les regarde d'ailleurs pas comme des ensembles d'objets mais comme des *qualités* de ces objets. Au contraire, dans l'ensemble des polyminos, les propriétés sur nous demandons d'étudier sont *également remarquables*, c'est pourquoi nous faisons l'hypothèse qu'il y a nécessité de travailler sur les ensembles d'objets et que l'émergence du point de vue ensembliste est favorisée.

De plus, le caractère *remarquable* d'une propriété a une incidence sur le caractère *non remarquable* de la négation de cette propriété. Alors qu'en logique la propriété P et la propriété Non P peuvent être utilisées de la même façon, ceci n'est pas vrai en géométrie. En effet, plus une propriété est *remarquable* plus sa négation est *non remarquable*, c'est-à-dire associée à un ensemble de grande mesure. Il est alors difficile de dessiner un représentant générique de cette classe d'objets. Par exemple, alors qu'il est possible de dessiner un représentant générique des parallélogrammes, un représentant générique des « non parallélogrammes » n'est pas représentable. De la même manière, dans l'ensemble des droites, les propriétés « perpendiculaires » et « non perpendiculaires » ne peuvent jouer le même rôle dans la résolution d'un problème car elles n'ont pas un caractère *remarquable* de même niveau. Dans l'ensemble des polyminos, puisque les propriétés que nous proposons sont également *remarquables*, la propriété Non P et la propriété P sont au « même niveau » et peuvent être également représentées.

Le fait que Non P soit une propriété *non remarquable* et sur laquelle on ne peut pas construire d'exemple freine l'apparition de la contraposée et du raisonnement par l'absurde comme moyen de résolution. En revanche, nous faisons l'hypothèse que, en partie pour cette raison, cela encourage l'utilisation du point de vue ensembliste.

Cette différence fondamentale entre les propriétés des objets dans les deux situations participe à rendre ces deux situations complémentaires dans notre ingénierie.

5.2.2. Approche perceptive ou non d'un objet en lien avec sa structure

On reconnaît, de manière perceptive, si un quadrilatère est ou n'est pas un parallélogramme (pour peu que ce ne soit pas *presque* un parallélogramme sans en être un !). En revanche, il est rarement possible de reconnaître, de la même manière, un polymino pavable sauf dans certains cas précis, par exemple pour un polymino de très petite taille ou pour un polymino rectangle de deux lignes... La plupart du temps, pour vérifier qu'un polymino est pavable, il faut mettre en œuvre des outils théoriques, comme par exemple vérifier la parité du nombre de cases à recouvrir si l'on pave avec des dominos, et il est souvent nécessaire d'exhiber un pavage.

La propriété *être pavable* ne caractérise pas, *structurellement*, le polymino comme c'est le cas, dans une certaine mesure, avec la propriété *être un parallélogramme* pour les quadrilatères. En conséquence, la propriété *être un parallélogramme* sera plus perçue comme la qualité d'un objet que comme la caractéristique d'une classe, contrairement à la propriété *être pavable*. Par suite, les enjeux de découverte et de vérité seront différents suivant les objets. Il est plus facile de trouver des conditions suffisantes pour être un parallélogramme, on les *voit*, que pour être un polymino pavable que rien ne permet de reconnaître.

Nous faisons donc l'hypothèse que les polyminos favorisent le point de vue ensembliste.

5.2.3. Position institutionnelle des objets de savoir

Les connaissances géométriques sur les quadrilatères mises en jeu dans nos problèmes de géométrie sont enseignées depuis le collège. Ces outils ont donc une forte place institutionnelle même si la classe des objets H n'est pas, elle-même, connue. En revanche, les polyminos sont des objets absents de l'enseignement. Ils n'ont pas de place institutionnelle. D'ailleurs, d'après d'autres expérimentations, les élèves placés devant ces problèmes de pavage de polyminos, n'ont pas l'impression de *faire des mathématiques* et les professeurs ont le sentiment de travailler *hors programme*. Les stagiaires PLC2 n'ont donc pas d'outils spécifiques pour la résolution de problèmes de polyminos.

5.2.4. Contexte général du problème

Le problème général de pavage de polyminos par d'autres polyminos est un problème ouvert au sens mathématique, c'est-à-dire qu'il n'est pas encore résolu par la communauté des mathématiciens. En réalité, sous la forme générale, il n'a aucune chance d'être résolu un jour. Autrement dit, on ne peut espérer trouver de bonnes caractérisations des polyminos pavables par un polymino donné quelconque, ni des algorithmes qui en temps « raisonnable » décident si un polymino est pavable ou non.

Le fait que le problème de pavage de polyminos soit proche de questions de recherche non résolues donne une plus grande motivation pour entrer dans une problématique de recherche. En effet, même si la question que les élèves essaient de résoudre est déjà résolue (et il savent qu'elle est résolue) ils sont dans la position du chercheur qui, pour avancer dans un problème, doit redécouvrir par lui-même certains résultats déjà connus. Si les premiers résultats ainsi produits ne sont pas nouveaux, les méthodes employées pour les produire peuvent l'être. Nous avons vu dans des situations de recherche, des élèves avoir des idées originales tout à fait intéressantes. Et les précédentes expérimentations de notre équipe ont montré un réel engouement de la part des élèves, propice à une bonne dévolution de nos situations.

5.2.5. Problématique sur l'implication

Lors de la première séance, le type de questionnement sur l'implication est différent dans les deux situations. En effet, alors qu'il s'agit, dans le problème de géométrie, de chercher une propriété et pour cela d'établir des implications et de vérifier leur domaine de validité, il s'agit, dans le problème sur les pavages de polyminos de vérifier la validité d'implications données. Le second problème est plus fermé mais la nature même de ces objets, en particulier le fait que les implications données ne paraissent pas vraies ou fausses dès le premier abord, permet un travail de recherche que permettraient difficilement les objets géométriques en jeu dans le premier problème.

Dans la deuxième séance, la problématique sur l'implication est la même dans les deux problèmes. Il s'agit, pour l'un et pour l'autre, de valider ou non des preuves proposées puis de discuter, en tant que professeurs, de leur éventuelle recevabilité.