

Conclusion

Résultats et perspectives de recherche

1. Analyse épistémologique et didactique de l'implication

Nous avons débuté notre analyse épistémologique en mettant en évidence quelques ambiguïtés dans l'interprétation du concept naturel d'implication, par exemple les confusions entre l'implication, sa réciproque et l'équivalence. Nous avons aussi montré que cette interprétation dépendait du contexte dans lequel était utilisée l'implication naturelle. Nous avons, en particulier, mis en évidence la présence d'une *conception causale-temporelle* de l'implication naturelle, qui amène à interpréter A implique B par *A est la cause de B* et donc *A est avant B* .

Nous nous sommes alors attachée à montrer comment l'implication mathématique était un modèle de l'implication naturelle, fidèle sous certains aspects et parfois contradictoire sous d'autres.

C'est ainsi que nous avons choisi de distinguer trois cadres pour l'implication : le cadre de la logique formelle, le cadre ensembliste et le cadre du raisonnement déductif. Ces trois cadres ont leur particularités, leurs points communs et se montrent complémentaires. Par exemple, le cadre ensembliste, en mettant en jeu des ensembles, permet de prendre en compte les implications entre énoncés contingents alors que le cadre du raisonnement déductif donne une place prépondérante à l'implication universellement quantifiée. Nous avons aussi fait l'hypothèse, qui a été confirmée en partie par nos expérimentations, que l'utilisation des trois cadres peut apporter des moyens différents et complémentaires dans une preuve. Alors que le cadre ensembliste paraît

plus approprié à la partie découverte et recherche de la preuve, en permettant de naviguer entre des sous-classes d'objets, le cadre de la logique formelle peut être nécessaire, ponctuellement, comme structure de contrôle, enfin le raisonnement déductif, par son pas ternaire, permet, dans certains cas, de rendre la preuve plus intelligible et de la soumettre à la validation d'autrui. Ces exemples d'utilisation des différents cadres ne sont pas exhaustifs, les cadres peuvent être utilisés d'une autre façon, suivant la situation proposée.

Nous avons montré que l'outil *jeu de cadres* est pertinent pour l'analyse épistémologique de l'implication, en ce qu'il permet de la révéler sous des points de vue très différents et de mettre ceux-ci en relation.

2. Analyse de manuels

Pour étudier la *vie* de l'implication mathématique, nous avons mené une analyse écologique de ce concept dans des manuels de quatrième de seconde et d'université.

Il est d'abord apparu que, dans certains manuels, en particulier des manuels de seconde récents, l'implication mathématique est réduite et assimilée à l'implication de la logique naturelle.

Le deuxième résultat de notre analyse de la transposition est la prépondérance du cadre du raisonnement déductif, dans le secondaire d'abord mais aussi dans bon nombre de manuels de l'université. De nombreuses expressions proposées pour l'implication dans ce cadre, *écrasent* l'implication sur le seul cas où la prémisse et la conclusion sont également vraies. De plus, certaines expressions assimilées à l'implication renforcent la *conception causale-temporelle* de l'implication.

Le cadre de la logique formelle, présent dans certains manuels de l'université, n'est jamais mis en lien avec le cadre du raisonnement déductif, si ce n'est parfois, pour dire qu'il est étonnant de donner la valeur de vérité Vrai à une implication dont la prémisse est fausse. Cependant, cela est présenté comme une nécessité, un peu étonnante, de la logique, sans que soit montré l'intérêt de la modélisation dans ce cadre.

Enfin, le cadre ensembliste est le plus souvent complètement absent. Lorsqu'il apparaît c'est uniquement réduit à l'inclusion, c'est-à-dire qu'il représente une implication universellement quantifiée sans que cela soit expliqué. Ceci est un témoin, dans les manuels, de la prégnance implicite de l'implication universellement quantifiée dans les pratiques mathématiques.

Les trois cadres ne sont donc pas présents de manière égale et, de plus, ils apparaissent très cloisonnés : les liens entre les cadres ne sont jamais mis en question.

3. Étude des objets géométriques

Pour étudier l'implication dans le cadre ensembliste, nous avons exposé un point de vue ensembliste sur les quadrilatères : un quadrilatère peut être défini par 4 points. Il en résulte, en particulier, que la classe des quadrilatères croisés apparaît comme une classe à part entière et non pas comme une classe d'objets particuliers à mettre de côté.

Nous avons alors développé le fait que les démonstrations basées sur un élément *quelconque* d'une classe d'objets, habituellement faites dans l'enseignement secondaire, ne pouvaient pas permettre de contrôler le caractère générique de l'élément en question.

Nous avons alors proposé de distinguer plusieurs types de figures : les *figures ensemblistes* et les *figures scolaires*. Les premières dépendent d'un point de vue ensembliste sur les objets. En déplaçant les points de la figure, on parcourt toute la classe d'objets. Une figure ensembliste est donc dynamique, au moins par la pensée. Les *figures scolaires* sont censées représenter un élément générique de la classe d'objets. Il est intéressant de voir que ce point de vue est très puissant, on remplace le parcours de toute la classe (point de vue ensembliste) par la considération d'un élément représentant tous les éléments de cette classe. Cependant, toute la difficulté réside dans le contrôle que l'on fait du caractère générique. Nous proposons alors de distinguer les *figures scolaires* et les *figures génériques*. Dans les premières, le contrôle du caractère générique de l'élément consiste à prendre, au départ, un élément *quelconque*, ou du moins censé l'être, de la classe. C'est ce qui est habituellement fait dans l'enseignement. Dans les secondes, le contrôle est exercé tout au long de la résolution en prenant en compte toutes les possibilités de configurations pour chaque élément nouveau. Ce contrôle est parfois très lourd.

Le cadre ensembliste apparaît comme un outil pour garantir le contrôle du caractère générique de l'élément que l'on construit.

4. Nos expérimentations

Nos premières expérimentations ont permis la problématisation de l'implication dans le cadre de la logique formelle en la confrontant à l'implication naturelle. Nous avons alors mis en évidence de nombreuses propriétés-en-acte, issues de la logique naturelle et renforcées par l'utilisation exclusive du raisonnement déductif. Par exemple, celle très prégnante qu'une implication n'a pas de sens s'il n'y a pas de *relation* entre la prémisse et la conclusion. La conception causale-temporelle de l'implication est apparue comme un obstacle à la distinction des conditions nécessaires et suffisantes. D'autre part, nous avons mis en évidence une conception sur le cadre

de la logique formelle : *les contenus sémantiques n'y interviennent pas*. Cette conception est, à nouveau, apparue comme un résultat de notre expérimentation en IUFM. De plus, l'implication est largement apparue comme implicitement universellement quantifiée parmi les étudiants, ce qui se confirme aussi avec les PLC2. Enfin, le cadre ensembliste a pu être questionné, au moins en partie, en travaillant sur la négation de l'implication.

Une deuxième expérimentation a montré que, bien que des enseignements de logique permettent de faire évoluer les réponses des étudiants, il n'en reste pas moins que la conception causale-temporelle, très présente, est un obstacle à l'utilisation du cadre de la logique formelle et à une bonne appréhension de l'implication en général.

Nous avons alors fait l'hypothèse que travailler l'implication dans le cadre ensembliste peut être un « remède » à la conception causale temporelle. C'est pourquoi nous nous sommes attachée à problématiser le cadre ensembliste pour notre expérimentation en IUFM. Nous avons pour cela proposé deux situations l'une en géométrie et l'autre sur le pavage de polyminos, faisant l'hypothèse que ces deux types d'objets pouvaient nous permettre d'obtenir des résultats complémentaires sur l'implication. Nous avons aussi pris en compte le cadre logique, et proposé des situations telles qu'il soit nécessaire et qu'un jeu de cadre entre les trois cadres soit possible et même indispensable pour résoudre la tâche.

L'analyse des productions a montré que l'implication avait été réellement problématisée. En effet, les objets étant reconnus faciles d'accès par les PLC2, les difficultés rencontrées s'expliquent alors par le questionnement sur l'implication et le raisonnement en général. Un travail, très présent, sur les conditions nécessaires et les conditions suffisantes ressort de l'analyse des protocoles. En particulier, nous avons montré qu'il était possible, même en géométrie scolaire, de construire des situations mettant en jeu des implications qui ne sont pas des équivalences. Ainsi, notre « pari » sur le problème de géométrie a été réussi par rapport à nos objectifs, ce qui n'était pas évident a priori, et nous avons montré que cette situation se révélait efficace pour la formation au raisonnement.

D'autre part, les situations ont aussi permis la problématisation du cadre logique, que ce soit sous forme de contrôle pour la recherche de conditions ou de questionnement en termes de connecteurs Ou et Et. Enfin, le cadre ensembliste apparaît bien, au vu des résultats, nécessaire à la résolution de la tâche et, bien qu'il ne soit pas maîtrisé, il est au moins questionné et les PLC2 s'en rapprochent. Il apparaît particulièrement dans la recherche d'un contrôle de l'élément générique pour la situation Géométrie 1, certains PLC2 font plusieurs *figures scolaires* pour imaginer plusieurs configurations. Bien qu'il ne soit pas encore question de *figure ensembliste* dynamique ceci est déjà le témoin d'un dépassement de la *figure scolaire*. D'autre part, la situation polymino ne permettant pas de trouver un bon représentant des sous-classes de polyminos, les PLC2 sont alors obligés de parcourir toute la classe en jeu plutôt que d'avoir recours à un élément quelconque.

Notre ingénierie a permis de montrer, en partie, la complémentarité de ces deux types d'objets pour problématiser l'implication dans les trois cadres.

5. À propos de notre thèse

Nous avons formulé la thèse qu'établir un *jeu de cadres* sur les cadres ensembliste, de la logique formelle et du raisonnement déductif était non seulement nécessaire mais aussi suffisant à une bonne appréhension et une bonne utilisation de l'implication.

Au terme de notre recherche, nous n'avons pas les moyens de prouver que ceci est suffisant. En effet, nous n'avons pas fait d'étude diagnostique de l'appréhension et de l'utilisation de l'implication par les PLC2, il ne nous est donc pas possible de « mesurer » l'apprentissage qu'ont permis ces séances. Cependant, nous pouvons, tout au moins, affirmer que cette thèse est confortée par nos résultats. En effet, l'analyse des productions montre un réel questionnement sur l'implication de la part de PLC2, notamment en termes de condition nécessaire, suffisante, équivalente ou encore minimale. Si l'apprentissage permis par ce questionnement n'est pas mesurable, il n'en reste pas moins qu'il existe. D'autre part, le cadre ensembliste, non connu des PLC2 est aussi questionné dans ces situations. Nous avons d'ailleurs montré une évolution au cours de l'ingénierie du rapport implicite des PLC2 avec ce cadre, ne serait-ce que par la prise en compte des quadrilatères croisés ou l'apparition de diagrammes ensemblistes (patates).

Un résultat important est donc la pertinence et l'efficacité de l'outil *jeu de cadre*, mis en œuvre avec les cadres *théorie des ensembles*, *logique formelle* et *raisonnement déductif*, pour la construction d'une situation d'apprentissage sur le raisonnement.

Nous continuons donc à soutenir cette thèse qui mérite d'autres recherches, en particulier concernant une situation d'apprentissage sur l'implication, comme nous allons le développer dans le prochain paragraphe.

6. Perspectives de recherche

Nous présentons ici quelques perspectives de recherche qui peuvent être résumées selon trois axes principaux.

Le premier concerne la poursuite de l'analyse épistémologique de l'implication mathématique. Nous voulons essayer de cerner plus précisément les relations entre les trois cadres et aussi, par exemple, la façon dont ils interviennent et dont ils se complètent dans une démarche de preuve.

Le deuxième axe de travail concerne la distinction entre les *figures scolaires*, les *figures génériques* et les *figures ensemblistes*. Nous voudrions notamment, voir ce qui est réellement fait dans l'enseignement. Nous voudrions, d'autre part, faire une étude approfondie de l'utilisation d'une *figure générique* ou d'une *figure ensembliste* dans un raisonnement. Cela pourrait nous donner des pistes pour déterminer comment le cadre ensembliste peut être utilisé dans l'enseignement pour permettre un contrôle de l'élément générique.

Enfin, notre dernier axe de recherche consiste en l'étude et la construction de nouvelles situations pour problématiser l'implication. D'abord, nous voudrions nous intéresser à des situations dans lesquelles l'implication est inhérente au problème posé et permet non seulement la résolution mais la compréhension du problème. Par exemple, ceci pourrait être possible dans des situations mettant en jeu des recherches d'optimums. D'autre part, nous sommes évidemment intéressée par la construction d'une séquence permettant un apprentissage, éventuellement mesurable, sur l'implication. Cette séquence devrait comprendre de nombreuses situations permettant des jeux de cadres, des phases d'institutionnalisation et la possibilité de faire des « allers-retours » entre ces différentes situations. Évidemment, ce type de séquence ne peut se prévoir que sur une longue période. Enfin, comme nous l'avons déjà avancé, nous aimerions construire une situation qui réponde aux exigences que nous avons formulées et qui rentre bien dans le cadre des programmes, paraissant ainsi plus pertinente aux professeurs. Cependant, nous devons d'abord mener une première recherche pour savoir si cela est possible...