IMPLICATION ET RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Virginie Deloustal-Jorrand
doctorante
Laboratoire Leibniz (Grenoble)

Résumé

L'implication est omniprésente dans l'activité mathématique, pourtant ce n'est pas un concept "transparent". Dans cet article, nous présenterons une analyse didactique de l'implication sous le triple point de vue : ensembliste, logique formelle et raisonnement déductif.
Pour cette étude notre hypothèse de travail est la suivante : l'absence de liens entre ces trois points de vue est à l'origine de nombreuses difficultés et erreurs tant dans l'appréhension que dans l'utilisation de l'implication.
En conclusion nous monterons, par l'analyse d'un problème issu de nos expérimentations[1], comment le point de vue ensembliste sur l'implication peut être mis en jeu dans un problème de géométrie.

0- Introduction

Le travail présenté ci-après est issu d'une thèse en cours effectuée au sein de l'équipe CNAM[2] du laboratoire Leibniz sous la direction de Denise Grenier[3] et Charles Payan[4]. Il a fait l'objet d'un séminaire lors de la XIè école d'été de didactique des mathématiques[5].

Notre étude porte sur le concept d'implication en mathématiques et ce choix est motivé par plusieurs caractéristiques de cet objet. L'implication apparaît comme un **objet mathématique transversal**. Toute définition est en fait la donnée d'une équivalence, or l'équivalence n'est rien d'autre que l'intersection de deux implications. Définir l'implication apparaît ainsi d'emblée comme un paradoxe.
L'implication est au centre de toute activité, en particulier de toute activité mathématique, elle est essentielle dans la formulation de preuves et de démonstrations. Pourtant, ce concept n'a pas une place précise dans l'enseignement et n'est quasiment pas enseigné.
D'autre part, l'existence de l'implication comme objet de la logique naturelle, conduit à confondre celui-ci avec l'objet mathématique. Il en résulte que l'implication apparaît comme un objet "transparent", facile à manipuler alors que, paradoxalement, des étudiants se trouvent confrontés à des difficultés liées à l'implication jusqu'en maîtrise et au-delà, surtout en ce qui concerne les conditions nécessaires et les conditions suffisantes.

---

[1]Ces expérimentations ont été faites dans deux classes de PLC2 (professeurs des lycées et collèges deuxième année) de l'IUFM (institut universitaire de formation des maîtres) de Chambéry et de l'IUFM de Grenoble durant l'année 2001.
[2]L'équipe CNAM (Combinatoire Naïve et Apprentissages Mathématiques) regroupe à la fois des chercheurs en mathématiques discrètes et des chercheurs en didactique des mathématiques.
[3]Denise Grenier est enseignant-chercheur à l'université Grenoble1.
[4]Charles Payan est chercheur CNRS.
[5]Les transparents présentés à cette occasion sont visibles grâce au fichier [Deloustal.PPT]

Nous présenterons trois points de vue sur l'implication et la place attribuée à chacun d'eux dans l'enseignement. Puis nous montrerons, sur quelques exemples, les effets d'une conception causale de l'implication. Enfin, nous étudierons un problème de géométrie issu d'une activité expérimentée durant l'année 2001.

I- Trois points de vue sur l'implication

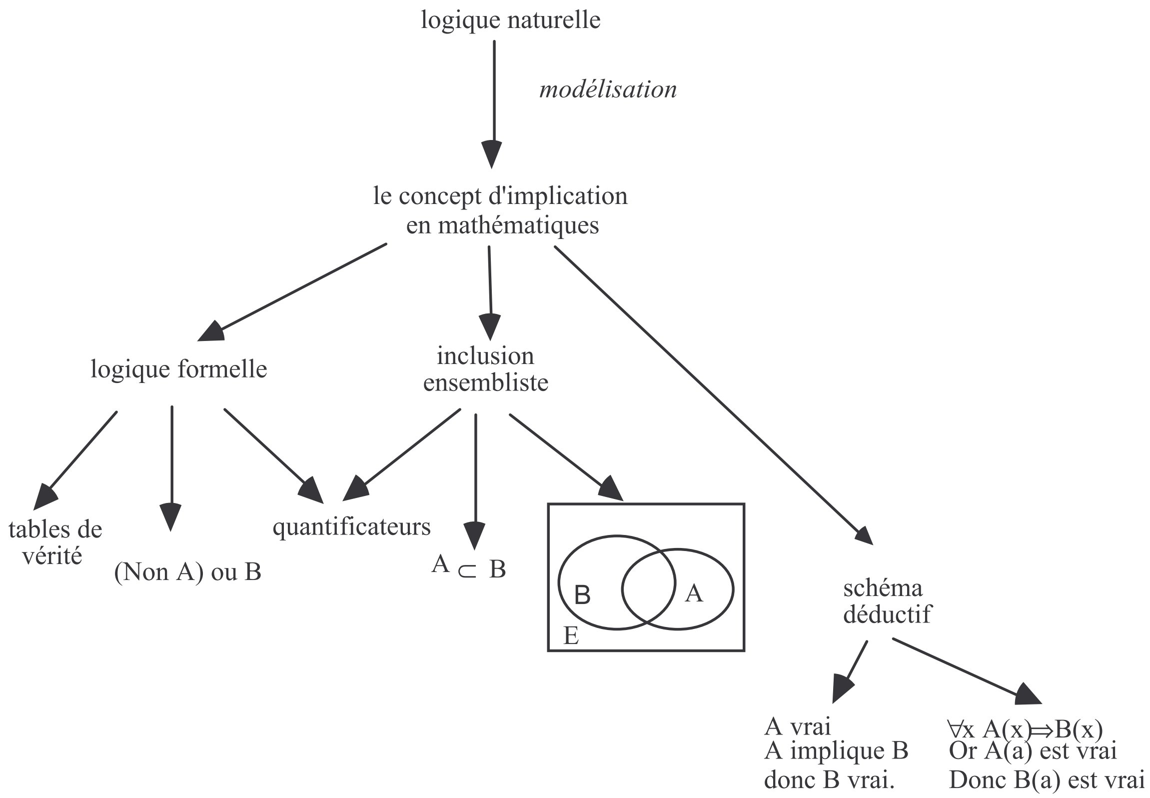
La notion d'implication existe dans la **logique naturelle**. Elle nous est nécessaire pour communiquer à l'aide du langage. L'implication mathématique apparaît alors comme une **modélisation** de l'implication de la logique naturelle. Comme tout modèle, ce concept mathématique est fidèle sous certains aspects à celui de la logique naturelle et ne l'est pas sous d'autres. Par exemple, la vérifonctionnalité[6] de l'implication mathématique n'est pas proche de la logique naturelle, en revanche, le fait que la contraposée d'une implication soit équivalente à celle-ci est déjà présent dans la logique naturelle grâce au "modus tollens" .

I-1 Présentation des trois points de vue

Une analyse épistémologique [Deloustal, 1999] nous a permis de distinguer trois points de vue sur l'implication :
- le point de vue de la **logique formelle**
- le point de vue du **raisonnement déductif**
- le point de vue **ensembliste**

Le schéma ci-dessous visualise ces trois points de vue :

[6]La valeur de vérité de "A B" ne dépend que des valeurs de vérité respectives de A et de B et non de leur contenu sémantique. C'est ce que nous appelons "vérifonctionnalité de l'implication".



Nous ne développerons pas le point de vue de la logique formelle et présenterons succinctement le point de vue du raisonnement déductif avant le point de vue ensembliste.

I-2 Le point de vue du raisonnement déductif

Nous appelons raisonnement déductif la mise en place d'un pas de déduction de la forme :

A est vraie
A B est vraie
Donc B est vraie

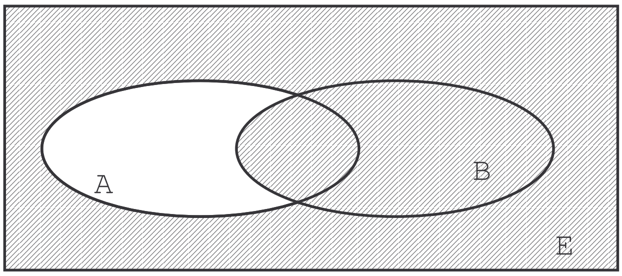
Sa structure ternaire comprend une prémisse (A est vraie), un énoncé tiers (A B) et une conclusion (B est vraie) à laquelle on aboutit par la règle du détachement. [Duval, 1993, p 44]. L'énoncé tiers doit être une proposition vraie : un théorème, une propriété, une définition, etc.

Le point de vue du raisonnement déductif est donc à placer à un niveau différent puisque c'est ici l'**utilisation** de l'implication dans un raisonnement qui est en jeu et non pas la définition de l'objet. Cependant, dans l'enseignement secondaire où ce point de vue est le seul présent, il fait souvent office de définition pour l'implication.

I-3 Le point de vue ensembliste

Nous entendons par "point de vue ensembliste sur l'implication", l'implication définie en termes d'ensembles.
Plus généralement, avoir un point de vue ensembliste, permet de considérer les propriétés comme définissant des ensembles d'objets. A chaque propriété correspond un ensemble, l'ensemble des objets qui vérifient cette propriété.

Le point de vue ensembliste sur l'implication peut alors être exprimé de la façon suivante : dans l'ensemble $\mathcal{E}$, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont respectivement l'ensemble des objets vérifiant la propriété A et l'ensemble des objets vérifiant la propriété B. Alors, l'implication de B par A (c'est-à-dire A B) est vérifiée par tous les objets de l'ensemble $\mathcal{E}$ exceptés ceux qui sont dans $\mathcal{A}$ sans être dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire par tous les objets situés dans la zone hachurée ci-dessous.



Notons que le point de vue ensembliste, contrairement au point de vue déductif, est peu pertinent pour traiter les implications entre propositions[7], il est plus adapté aux énoncés contingents[8] puisque les ensembles permettent de représenter des propriétés qui ne sont vraies que pour certains objets de l'univers considéré.

Le point de vue ensembliste se différencie aussi du point de vue déductif dans sa mise en œuvre dans l'activité de preuve. Comme nous l'avons décrit précédemment, la démonstration d'une implication A B par un raisonnement déductif se base sur une hypothèse A vraie pour construire une chaîne d'inférences [Duval, 1993], grâce à des énoncés tiers qu'on sait vrais par ailleurs, jusqu'à la conlusion B qui est alors vraie. La démonstration de cette même implication sous un point de vue ensembliste consisterait à se placer dans une classe d'objets "suffisamment grande", puis de restreindre cette classe grâce aux propriétés contenues dans l'hypothèse A, jusqu'à obtenir une classe plus petite dont on peut vérifier qu'elle est bien incluse dans la classe des objets qui ont la propriété B.

Ces trois points de vue ont évidemment des liens et leurs intersections ne sont pas vides. Citons, par exemple, l'intersection de la logique formelle et du point de vue ensembliste qui contient les quantificateurs.

II- Constats dans l'enseignement

---

[7] "En logique classique, une proposition est une entité linguistique qui porte le vrai ou le faux." [Durand-Guerrier, 1999, p65]
[8] "Un énoncé est contingent pour un sujet donné à un instant donné t si le sujet n'a pas, à l'instant t, les moyens de savoir si cet énoncé est vrai ou faux." [Durand-Guerrier, 1999, p70]

• Les définitions de l'implication ou de termes associés[9] sont globalement peu présentes dans les manuels. Elles apparaissent pourtant dans les manuels d'algèbre de DEUG scientifique et dans certains nouveaux manuels de seconde (programme 2000) dans des encarts sur le raisonnement.

• Le point de vue ensembliste est totalement absent. Même dans les chapitres de théorie des ensembles des manuels de DEUG, seule la phrase suivante fait le lien avec les ensembles :

A inclus dans B si pour tout x, x A   x B

• Le point de vue logique est défini dans certains manuels de DEUG mais aucun lien n'est fait avec l'implication utilisée dans le raisonnement déductif.

• Le point de vue déductif est prépondérant notamment en collège et lycée où il est l'unique point de vue présenté. En DEUG, il est présenté pour définir des typologies de raisonnements : par contraposée, par l'absurde, par récurrence...

Ces premiers résultats montrent bien un **cloisonnement des points de vue** dans l'enseignement, et l'impossibilité pour un élève de faire le lien entre eux. Des exemples nous permettront d'illustrer les trois constats suivants moins généraux.

• Les manuels de seconde ne prennent pas en charge la définition de l'implication, il y a une **identification à la logique naturelle**.

- Si...alors : tournure "standard" qui tend à expliquer que si une propriété est satisfaite, on peut en déduire qu'une seconde l'est également. [Pyramide, 2nde, 2000]

- Signification de "si..., alors..."
Lisez attentivement les affirmations suivantes qui se ressemblent . Certaines ont également la même signification, d'autres non. Beaucoup sont fausses.
(...)
BILAN
Pour éviter des ambiguïtés, on préfère, en langage mathématique, utiliser la forme "Si...alors...". Ainsi on évite d'écrire une phrase comme "Deux droites sont contenues dans un même plan si elles sont parallèles." car une telle phrase risquerait d'être interprétée comme signifiant "Si deux droites sont parallèles alors elles sont contenues dans le même plan." ou encore "Si deux droites sont contenues dans un même plan alors elles sont parallèles." (ce qui est faux). [Point Math, 2nde]

- La phrase "si A alors B" est une implication. On note A   B et on lit "A implique B" ou "A donc B". [Indice, 2nde, 2000]

- Une *implication* est une phrase mathématique indiquant qu'une donnée (1) entraîne ou *implique* une conclusion (2) [Déclic, 2nde, 2000]

• La signification de l'implication est souvent "écrasée" sur le cas où la prémisse et la conclusion sont toutes les deux vraies. En effet, certaines définitions, souvent présentes et liées au point de vue déductif, ne prennent en compte que ce cas et ignorent les trois autres possibilités.

"P vrai implique Q vrai" ; "Si P est vrai, alors Q est vrai" ; "P donc Q"

---

[9]Nous regroupons sous l'appelation "termes associés" les expressions "P implique Q", "P entraîne Q", "P donc Q", "Q est la conséquence de P", "Si P alors Q", "P   Q", "P est une condition suffisante pour Q", "Q est une conditions nécessaire pour P", "Il suffit que P pour que Q", "Il faut que Q pour que P".

• Les définitions de l'implication connotent d'autre part souvent une notion de causalité voire de temporalité[10].

"On a Q dès qu'on a P" ; "Si P est vrai alors Q est vrai"

Cet aspect causal est renforcé par la définition de la démonstration dans les manuels. En effet, celle-ci est présentée comme une suite de phrases, reliées entre elles par des théorèmes, propriétés ou définitions, menant des hypothèses jusqu'à la conclusion.

> -Pour affirmer qu'une proposition Q est vraie, on fait un raisonnement ou une démonstration. Pour cela, on utilise des propositions que l'on sait déjà être vraies et l'on en déduit la proposition Q grâce à un petit nombre de règles précises. [Liret-Martinais, DEUG]
>
> -Démontrer que l'énoncé "**P implique Q**" **est vrai**, c'est démontrer qu'en partant de l'**hypothèse P est vrai**, on aboutit, en appliquant des règles de calcul, des théorèmes des définitions connues, à la **conclusion Q est vrai**. [Bréal, 2nde, 2000]
>
> -On bâtit ainsi de proche en proche une série de maillons qui conduiront de l'hypothèse à la conclusion. [Indice, 2nde, 2000]
>
> -"Démontrer" signifie ici, constituer une chaîne d'égalités toutes justifiées par une définition ou une propriété du cours. [Armand Colin, 4è, 1979]

III- Conception causale de l'implication

Une conception est *"un ensemble de règles, de pratiques, de savoirs qui permettent de résoudre une classe de situations et de problèmes de façon à peu près satisfaisante, alors qu'il existe une autre classe de situations où cette conception échoue, soit qu'elle suggère des réponses fausses, soit que les résultats sont obtenus difficilement et dans des conditions défavorables."* [Brousseau, 1986]

Nous entendons par "**conception causale** de l'implication" toutes les règles, pratiques et savoirs liés à l'interprétation de la phrase "A implique B" par "**A est la cause de B**". Cette conception de l'implication est évidemment très proche de la logique naturelle et son domaine de validité[11] est étendu, il comprend notamment les problèmes usuels de l'enseignement nécessitant un raisonnement déductif. Comme nous l'avons montré dans le paragraphe précédent, cette conception est renforcée par les pratiques de l'enseignement, pourtant, elle mène à des incohérences dans l'utilisation du concept mathématique. En effet, de cette interprétation, découlent facilement l'interprétation "**A est la cause de B et seulement A**" puis l'interprétation "A est la cause de B, **A précède donc B**" que nous appellerons "**conception temporelle** de l'implication". Cette dernière interprétation est encore raisonnable au sein de la logique naturelle puisque dans l'univers physique, la cause précède l'effet ! Pourtant, elle mène à un paradoxe dans l'utilisation de l'implication mathématique : si A   B est traduit par "A est la cause de B et donc A est avant B" comment admettre que B soit une condition nécessaire pour A ?

---

10 Ceci sera détaillé dans le paragraphe suivant.

11 Nous appelons "domaine de validité d'une conception" l'ensemble des situations auxquelles les règles associées à cette conception apportent une réponse exacte. [cours de DEA de didactique des mathématiques, Grenier, 1999]

Voici quelques exemples issus de nos expérimentations[12] qui illustrent des erreurs pouvant être expliquées par la conception causale. Ce sont les réponses de Sarah qui a une maîtrise de mathématiques et qui prépare le CAPES[13]

• Donnez des traductions de l'expression "W seulement si S"[14]

S entraîne W et seulement S

Aucune autre possibilité d'avoir W sans passer par S

• Donnez la négation de P Q[15]

Q peut se réaliser sans que P se réalise

• Y a-t-il des implications entre les deux expressions
"M est une condition nécessaire pour T"
"T est une condition suffisante pour M"[16]

il n'y a pas d'implications entre les deux expressions car T nécessite M et il suffit d'avoir T pour avoir M

Lors de l'interview avec l'observateur après le questionnaire Sarah justifie ses réponses :

O : Et pourquoi il n'y a pas d'implications entre les deux phrases ?

S : Pour moi "M condition nécessaire pour T", ça veut dire que nécessairement il faut avoir M pour avoir T. Donc M implique T.

[...]

O : Et alors pourquoi il n'y a pas d'implications entre les deux ?

S : Pour la première, "M condition nécessaire pour T", donc nécessairement il faut avoir M pour avoir T. Donc M implique T. Pour la deuxième il suffit d'avoir T pour avoir M, donc T implique M.

À propos d'une autre question :

S : On ne peut pas dire P1 implique P2, c'est pas logique...

O : Pourquoi ?

S : Parce que ce n'est pas une conséquence!!

Le modèle "conception causale de l'implication" permet d'expliquer beaucoup d'erreurs, en particulier celles dues à l'implication "qui n'est pas dans le bon sens". Des expérimentations en maîtrise de mathématique ont montré que, contrairement à une idée répandue, un enseignement de logique ne suffit pas à évacuer cette conception et à régler les erreurs qui en découlent.

IV- Hypothèse de recherche

En conclusion de ces premiers paragraphes, rappelons quelques constats issus de nos recherches.

Nos différentes expérimentations menées avec des étudiants-futurs enseignants[17] puis avec des étudiants de maîtrise de mathématiques[18] ont montré que l'objet implication

---

[12]Ces expérimentations ont eu lieu en juin 1999 avec quatre étudiants en mathématique ayant réussi ou préparant un concours d'enseignement. Ces expérimentations concernaient l'objet implication et sont décrites dans [Deloustal, 1999]

[13]Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement Secondaire.

[14]L'expression "W seulement si S" est mathématiquement équivalente à l'expression "W implique S".

[15]L'expression "Non (P Q)" est mathématiquement équivalente à l'expression "P et Non Q".

[16] Ces deux expressions sont mathématiquement équivalentes à l'expression "T implique M" et sont donc équivalentes entre elles.

[17]Cf. note 12.

n'était pas un objet transparent. Elles ont aussi montré que les difficultés rencontrées par les étudiants étaient essentiellement dues à une conception causale de l'implication. Or cette conception causale est non seulement issue de la logique naturelle, ce qui lui donne un statut très fort, mais elle est aussi renforcée par les pratiques de l'enseignement comme l'ont montré nos analyses de manuels. Enfin, un enseignement de logique peut très bien cohabiter avec cette conception et ne suffit pas à supprimer les difficultés qui lui sont attachées.
À la suite de ces constats, nous avons formulé l'hypothèse de recherche suivante : **il est nécessaire de connaître et de faire le lien entre les trois points de vue sur l'implication pour une bonne appréhension et une bonne utilisation de celle-ci.**
Suit alors la question d'une situation d'apprentissage : **comment, à l'aide de différents cadres, problématiser l'implication ?**

Dans le paragraphe suivant nous présentons un problème de géométrie pour lequel nous faisons l'hypothèse qu'il permet un travail sur l'implication sous le point de vue ensembliste. Nous justifierons cette hypothèse dans la suite.

V- Présentation du problème de géométrie

Ce problème de géométrie a été proposé à deux classes de PLC2[19]. Il était inséré dans une expérimentation comportant, pour chacune des classes, deux séances de trois heures. La première séance comportait un travail en petits groupes sur ce problème de géométrie et sur un problème de pavage de polyminos[20] ; la deuxième séance proposait une réflexion en petits groupes sur des preuves rédigées.

V-1 Le problème

Soit ABCD un quadrilatère qui a deux côtés opposés de même longueur. À quelles conditions sur les diagonales a-t-on :

(P1) 2 autres côtés parallèles ?
(P2) 2 angles droits ?
(P3) les 2 autre côtés de même longueur (entre eux) ?

V-2 Une implication différente pour un problème différent

Par une analyse de l'implication en jeu dans ce problème, nous voulons montrer qu'un exercice qui ne concerne que des notions de géométrie basiques peut questionner l'implication et le raisonnement en général de façon non triviale.

Un problème usuel de l'enseignement met généralement en jeu une implication "A B" où A et B sont connus. Pour répondre au problème, on met alors en oeuvre un raisonnement déductif dans lequel on ne considère que le cas où A est vrai.

---

[18] Les expérimentations en maîtrise de mathématiques ont eu lieu en 2000 dans le cadre d'un module de didactique des mathématiques.
[19] Cf.note 1
[20] Pour des détails sur les situations de pavages de polyminos se référer à [Grenier et Payan, 1998]

Cette implication prend place d'ordinaire dans une classe d'objets déterminée, par exemple les quadrilatères, les triangles ou les parallélogrammes... On regarde en fait l'implication : "dans $\mathcal{H}$, A   B", mais ce $\mathcal{H}$ est implicite lorsque la classe dans laquelle on se place est institutionnalisée, ce qui est le cas dans l'enseignement. En effet, si l'implication se place dans la classe des parallélogrammes, pour résoudre le problème on utilise implicitement des propriétés des parallélogrammes (par exemple, la convexité), sans pour autant rendre cette restriction explicite.

La recherche de conditions suffisantes, pratiquement absente de l'enseignement, suit le schéma "dans $\mathcal{H}$, (A ?)   B", c'est-à-dire quelle est la propriété A qu'il suffit que les objets de la classe $\mathcal{H}$ vérifient pour qu'ils vérifient aussi la propriété B ?

Lorsque l'on émet des conjectures, on se place dans le schéma où l'on connaît $\mathcal{H}$ et A mais pas B : "dans $\mathcal{H}$, A   (B ?)".

Notre problème propose un schéma encore différent. Ici, l'hypothèse "avoir deux côtés opposés de même longueur" ne représente pas une classe d'objets institutionnalisée, cette hypothèse doit donc être présente explicitement au cours de la résolution. La classe $\mathcal{H}$ n'existant pas en tant que telle dans l'enseignement, il faut revenir à la propriété H qui lui est associée. Il y a donc d'une part H qu'on connaît et A qu'on ne connaît pas et d'autre part B qu'on connaît. Entre les deux, se trouve une implication dont le sens n'est pas déterminé puisque nous n'avons pas précisé s'il s'agit de conditions nécessaires ou suffisantes.

Nous faisons l'hypothèse que ce problème permet et oblige un travail sur l'implication sous le point de vue ensembliste et pour justifier cela nous allons détailler les variables didactiques de la situation.

V-3 Les variables didactiques du problème de géométrie

Cette analyse de l'implication nous a permis de différencier les places respectives de H, A et B, nous allons maintenant exprimer les variables didactiques en fonction des caractéristiques de H, A et B[21]. Nous avons distingué deux variables didactiques, l'une regroupant les choix pour intégrer un travail sur le point de vue ensembliste, l'autre regroupant les choix pour permettre un travail sur l'implication.

V1 : **Choix pour intégrer un travail sur le point de vue ensembliste**

• $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des classes d'objets **non institutionnalisées** dans l'enseignement.
- $\mathcal{H}$ est la classe des quadrilatères qui ont deux côtés opposés égaux. H doit alors être explicite durant tout le problème et il faut travailler avec des propriétés non connues a priori.
- $\mathcal{B}$ est la classe des quadrilatères qui ont deux côtés opposés parallèles y compris les quadrilatères croisés.

[21]Nous notons $\mathcal{H}$ (respectivement $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$), l'ensemble des objets qui vérifient la propriétés H (respectivement A, B).

- $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ contiennent les **quadrilatères croisés et concaves**. Or les quadrilatères croisés ne sont pas enseignés, en particulier ils ne sont pas différenciés les uns des autres et sont tous mis à part sous l'étiquette "croisés". Il est donc nécessaire de faire un travail de définition pour différencier les croisés mis en jeu dans la situation puisqu'ils ne sont pas tous du même type. La présence des croisés dans le problème rend les stratégies liées au point de vue ensembliste moins coûteuses.

• **$\mathcal{H}$ reste le même** pour les trois questions du problème.
Nous faisons l'hypothèse le point de vue ensembliste est ainsi moins coûteux sur la durée.

V2 : **Choix pour un travail sur l'implication**

• Structure du problème
- **A est inconnu**. Nous faisons l'hypothèse que cette structure, en bouleversant le sens du raisonnement déductif, rend improbable le recours à une conception causale.
D'autre part, l'utilisation du point de vue logique et en particulier de la contraposée, est rendue très difficile puisque partir de Non B c'est-à-dire de la propriété "avoir deux côtés opposés non parallèles" ne donne pas de résultats.
- **A est de la forme (A1 ou A2).** Alors que les implications habituellement enseignées sont de la forme "(H et A1 et A2)   B" avec des hypothèses s'ajoutant les unes aux autres, l'implication est ici de la forme "(H et (A1 ou A2))   B".
- **$\mathcal{H}$ n'est pas institutionnalisé**. Pour la recherche des conditions nécessaires, il n'est pas possible de se placer dans la classe $\mathcal{H}$ et de regarder l'implication B   A, il faut garder H explicite et considérer l'implication (H et B)   A. H doit aussi être explicite dans la recherche des contre-exemples qui doivent vérifier (H et A et Non B).

• Formulation de la question
Elle oblige un questionnement sur le sens de l'implication puisque la question ne précise pas s'il s'agit de conditions nécessaires ou de conditions suffisantes.

V-4 Analyse préalable de la première question

Nous présentons ici trois approches du problème pouvant induire des stratégies différentes. Nous ne traiterons que la première question (P1).

La première approche pose la question des conditions suffisantes. Il est possible de lister des conditions sur les diagonales (diagonales de même longueur, diagonales perpendiculaires...) puis de contrôler le fait que ces conditions, additionnées à l'hypothèse H, impliquent la conclusion B. Cette approche replace le problème dans le cadre du point de vue déductif et permet de trouver des conditions dont on sait qu'elles sont suffisantes, mais elle est coûteuse.

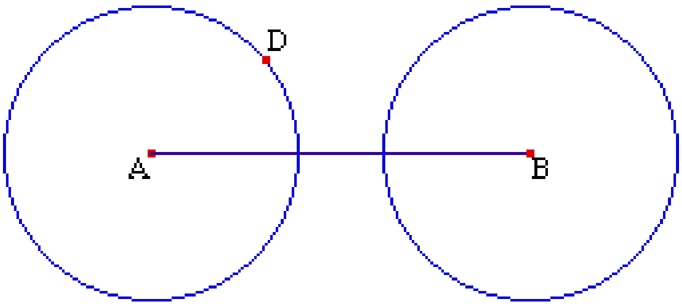
La deuxième approche se rapporte à des objets connus. Certains quadrilatères qui vérifient à la fois H et B sont bien connus, par exemple les carrés, les rectangles, les parallélogrammes. Or les propriétés de leurs diagonales sont aussi bien connues, cela permet de travailler directement par équivalences. Cependant, si elle permet de trouver quelques conditions de façon très économique, cette approche ne renseigne pas quant à l'exhaustivité des résultats, toutes les configurations ne sont pas atteintes a priori.

Enfin, la troisième approche pose la question des conditions nécessaires. Quels sont les objets qui vérifient à la fois l'hypothèse H et la conclusion B ? Et quelles sont les propriétés de leurs diagonales ? Cette approche est fondamentalement ensembliste. Puisque l'on cherche l'ensemble $\mathcal{A}$ tel que son intersection avec l'ensemble $\mathcal{H}$ soit contenue dans l'ensemble $\mathcal{B}$ (en termes de propriétés : A tel que (H et A)   B), il est naturel de chercher auparavant l'intersection de l'ensemble $\mathcal{H}$ avec l'ensemble $\mathcal{B}$, c'est-à-dire les objets qui vérifient à la fois la propriété H et la propriété B. Pour étudier les objets qui vérifient (H et B), il y a alors deux stratégies possibles, soit se placer dans $\mathcal{H}$ et ajouter la propriété B, soit se placer dans $\mathcal{B}$ et ajouter la propriété H. La première stratégie est plus proche du texte du problème mais la seconde est plus facile d'accès, il semble en effet plus facile de représenter deux côtés parallèles que deux côtés opposés égaux. Nous détaillerons ces deux stratégies l'une après l'autre.

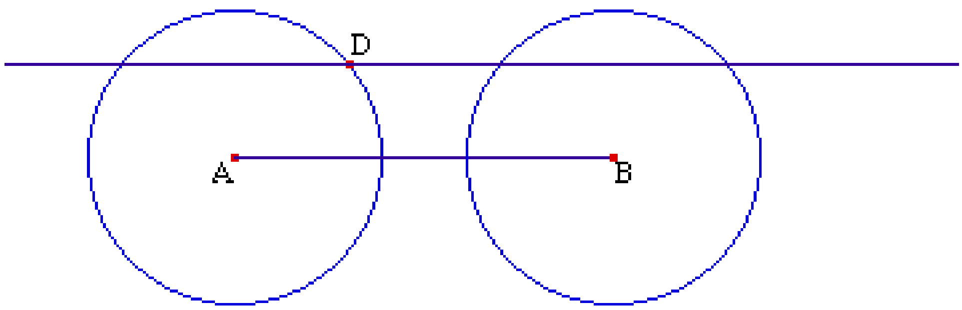
• Première stratégie ensembliste : **<u>H</u> puis B** (H : **deux côtés opposés égaux**)

a) <u>H</u> puis B : les configurations

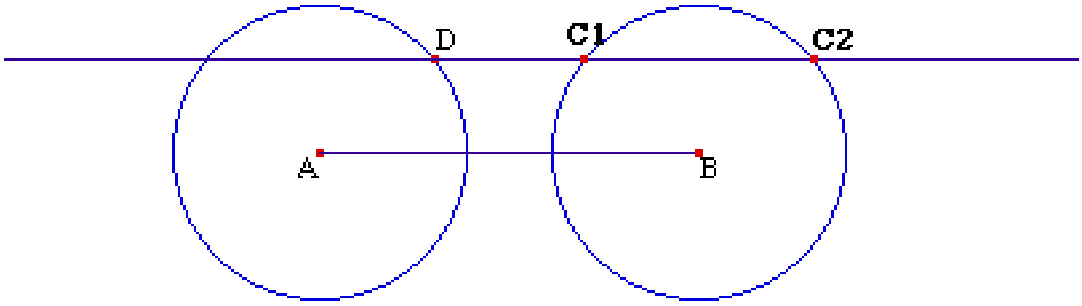
Une fois les points A et B placés dans le plan, l'hypothèse (H) "deux côtés opposés de même longueur" se traduit par AD=BC. C'est-à-dire que les points C et D appartiennent respectivement à deux cercles de même rayon, l'un centré en B, l'autre centré en A.



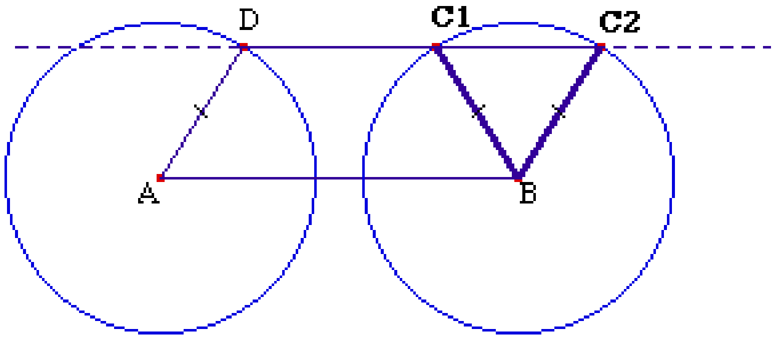
Une fois D fixé, pour traduire la propriété (B) "les deux autres côtés sont parallèles", il faut tracer la droite parallèle à (AB) passant par D, C est alors point d'intersection de cette droite avec le cercle de centre B.



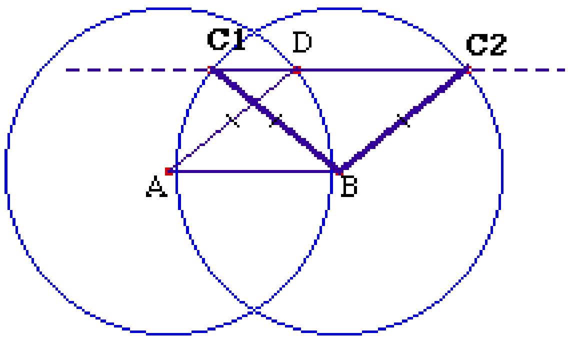
Il y a deux points d'intersection C1 et C2.



On obtient donc les configurations : **trapèze isocèle** (ABC_1D) et **parallélogramme** (ABC_2D).



Mais il ne faut pas oublier que, A fixé, on peut encore faire varier la distance AB, le rayon des cercles et la position de D (liée à celle de C) sur son cercle.
Lorsque D parcourt le cercle ou lorsqu'on réduit le rayon des cercles, on reste bien en présence de ces deux configurations. En revanche, lorsque les deux cercles se croisent, soit parce que l'on a agrandi leur rayon soit parce que l'on a diminué la distance AB, on se trouve en présence d'une nouvelle configuration : un quadrilatère **croisé de type 1** (ABC_1D) (croisé associé au trapèze isocèle).



On a donc l'implication : (H et B) (parallélogramme ou trapèze isocèle ou croisé 1). Nous connaissons donc les configurations qui vérifient à la fois H et B, reste à trouver les conditions sur les diagonales.

b) <u>H</u> puis B : les conditions sur les diagonales

Être un parallélogramme équivaut, pour un quadrilatère, à avoir **ses diagonales qui se coupent en leur milieu.** Les trapèzes isocèles et les quadrilatères croisés du type (C1) ont des **diagonales de même longueur**.

c) <u>H</u> puis B : des conditions suffisantes

Reste à voir si "avoir ses diagonales de même longueur" (A1) est une **condition suffisante**, c'est-à-dire si l'implication dans les quadrilatères :
(H) et (A1)   (trapèze isocèle ou croisé du type (C1)) est vraie.
(où H : "deux côtés opposés de même longueur" et A1: "avoir ses diagonales de même longueur")

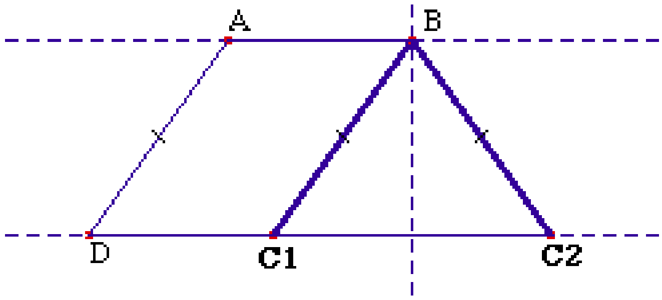
Pour cela, il faut reprendre le point de vue ensembliste et s'intéresser aux quadrilatères qui vérifient (H) et (A1). Nous ne détaillerons pas la suite de la résolution, mais il faut savoir que, sous ces deux conditions, on construit évidemment le trapèze isocèle et le croisé1 mais aussi un quadrilatère croisé qui ne vérifie pas la conclusion (B) "avoir ses deux autres côtés parallèles" : le quadrilatère croisé associé au parallélogramme. La condition "avoir des diagonales de même longueur" n'est donc pas suffisante et il faut la restreindre pour éliminer ce cas.

La réponse finale à l'exercice n'a pas une grande importance en soi mais nous voulions montrer comment ce problème sur des objets a priori simples peut mettre en question l'implication.

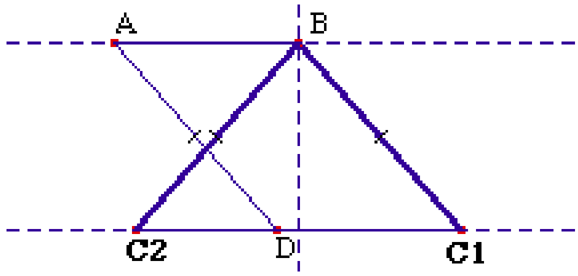
• Seconde stratégie ensembliste : **<u>B</u> puis H** (B : **deux côtés opposés parallèles)**

a) <u>B</u> puis H : les configurations

Pour traduire (B) "deux côtés opposés parallèles", on trace deux droites parallèles, l'une portant A et B, l'autre portant C et D. A, B, D fixés, il y a deux façons de placer C pour que AD=BC (c'est-à-dire pour que (H) soit vérifié) : C1 et C2



On obtient deux configurations : **parallélogramme** (ABC$_1$D) et **trapèze isocèle** (ABC$_2$D).
Mais il ne faut pas oublier que A fixé, B et D peuvent se déplacer sur leur droite.
Lorsque [BC] croise [AD], soit parce que l'on a déplacé B soit parce que l'on a déplacé D, on obtient une nouvelle configuration : un quadrilatère croisé de type 1 (ABC$_2$D) (associé au trapèze isocèle).



b) les conditions sur les diagonales et les conditions suffisantes

La suite du travail se fait comme dans la stratégie précédente.

Cette seconde stratégie, appuyée aussi sur le point de vue ensembliste, n'a pas une aussi grande portée que la précédente. En effet, pour montrer que les conditions sont suffisantes, il faut repartir de l'hypothèse (H) et donc revenir à la stratégie précédente. De plus, pour les questions suivantes du problème, alors que l'hypothèse (H) reste la même, la conclusion (B) est à chaque fois nouvelle et la seconde stratégie doit donc à chaque fois reconstruire ses bases.

VI- Quelques conclusions

L'analyse des résultats de l'expérimentation du problème de géométrie est en cours. Il faudra donc attendre pour une conclusion complète. Cependant, nous pouvons déjà dire que, si la plupart des étudiants ont trouvé cet exercice très facile à la lecture de l'énoncé, sa résolution a demandé un travail individuel puis en groupe de plus d'une heure et demie. Les réponses concernant la partie (P1) ne sont que partielles et finalement cet exercice a été déclaré complexe par l'ensemble des groupes.

> "C'est un exercice qu'en tant qu'enseignant, je ne poserais pas avant la licence" [Robert, groupe 5]

L'exercice a rempli son rôle, quant au travail sur l'implication, puisque des débats à propos de conditions nécessaires et suffisantes ont eu lieu dans les groupes de façon explicite ou implicite.
Nous avons quelques éléments qui montrent que l'exercice a aussi rempli son rôle, quant au travail sur le point de vue ensembliste, au moins en partie. Ceci notamment lors de débats sur l'exhaustivité des résultats qui ont obligé des groupes qui avaient écarté d'emblée les quadrilatères croisés à leur redonner une place dans le problème.

Mais répétons que ces résultats ne sont pas définitifs et qu'ils sont à placer parmi d'autres résultats. En effet, ce problème de géométrie fait partie d'une expérimentation de six heures comportant d'autres phases de travail, notamment des phases de travail en groupes sur des preuves rédigées. De plus, cette expérimentation prend sens quand on sait qu'elle a été précédée de deux autres expérimentations menées en 1999 et 2000, il faut donc replacer ce problème de géométrie dans un plus large contexte.
Il reste donc à finir l'analyse de ces résultats et à faire un travail de synthèse pour les raccorder entre eux, c'est l'objectif que nous nous donnons pour l'année qui vient.

BIBLIOGRAPHIE

Artaud M. (1997) *La problématique écologique - un style d'approche du didactique*, in Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques, Houlgate, 19-27 août 97.

Brousseau G. (1986) *Fondements et Méthodes de la didactique des mathématiques*, in Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 7.2, éd. La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1998) *Le concept de rapport au savoir*, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université J. Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1992) *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, in Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 12(1), éd. La Pensée Sauvage.

Deloustal V. (1999) *Le concept d'implication : l'objet mathématique, quelques aspects dans les manuels, conceptions de futurs enseignants*, Mémoire de DEA, université Joseph Fourier, Grenoble.

Deloustal-Jorrand V. (2000) *L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs*, in Petit x n°55, éd. IREM de Grenoble.

Deloustal-Jorrand V., Grenier D. (2001) *Une étude épistémologique et didactique de l'implication en mathématiques*, in Learning in Mathematics and Science and Educational Technology, Vol.1, University of Cyprus.

Douady R. (1986) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet,* in Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.7.2 , éd La Pensée Sauvage.

Durand-Guerrier V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*., Thèse, Université Claude Bernard, Lyon.

Durand-Guerrier V. (1999) *L'élève, le professeur et le labyrinthe*, in Petit x n°50, éd. IREM de Grenoble.

Durand-Guerrier V. (2000, a) *Négation, conditionnels et quantification dans la classe de mathématiques*, in Actes du XXVIème colloque de la COPIRELEM, Limoges-mai 1999.

Durand-Guerrier V., Le Berre M., Pontille MC., Reynaud-Feurly J. (2000, b) *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques*, éd. IREM de Lyon.

Duval R. (1988) *Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence,* in Annales de didactiques et de sciences cognitives Vl 1, ULP, IREM de Strasbourg.

Duval R. (1993) *Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?*, Petit x n°31, éd. IREM de Grenoble.

Grenier D., Payan C. (1998) *Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes*, in Recherches en didactique des mathématiques, vol 18/1, éd. La Pensée Sauvage.

Rolland J. (1999) *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication,* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Vergnaud G. (1990) *La théorie des champs conceptuels*, in Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 10/2.3, éd. La Pensée Sauvage.

MANUELS CITÉS

[Armand Colin, 4ème, 1979] : *Mathématiques quatrième*, collection P. Louquet, éd. Armand Colin.
[Bréal, 2nde, 2000] : *Mathématiques seconde*, éd.Bréal, IREM de Poitiers.
[Déclic, 2nde, 2000] : *Mathématiques seconde,* Déclic, éd. Hachette.
[Indice, 2nde, 2000] : *Mathématiques seconde,* Collection Indice, éd. Bordas.
[Liret-Martinais, Deug] : Liret F., Martinais D., *cours de mathématique, algèbre 1ère année*, éd. Dunod.
[Point Math, 2nde, 2000] : *Mathématiques seconde,* Point Math, éd.Hatier.
[Pyramide, 2nde, 2000] : *Mathématiques seconde*, collection Pyramide, éd. Hachette éducation.